



MULTIMEDIAŁNIE NA MATEMATYCE II

AGNIESZKA SZUMERA

Program nauczania matematyki dla szkoły branżowej II stopnia

opracowany w ramach projektu

„Tworzenie programów nauczania oraz scenariuszy lekcji i zajęć wchodzących w skład zestawów narzędzi edukacyjnych wspierających proces kształcenia ogólnego w zakresie kompetencji kluczowych uczniów niezbędnych do poruszania się na rynku pracy”

dofinansowanego ze środków Funduszy Europejskich w ramach
Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój, 2.10 Wysoka jakość systemu oświaty

WARSZAWA 2019

Redakcja merytoryczna – Agnieszka Jaworska
Recenzja merytoryczna – Ewa Olszewska
dr Anna Rybak
dr Beata Rola
Agnieszka Ratajczak-Mucharska

Redakcja językowa i korekta – Editio

Projekt graficzny i projekt okładki – Editio

Skład i redakcja techniczna – Editio

Warszawa 2019
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 4.0 Polska (CC-BY-NC).
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pl>

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	5
2. CELE KSZTAŁCENIA – OGÓLNE I SZCZEGÓŁOWE	9
3. ORGANIZACJA WARUNKÓW I SPOSÓB REALIZACJI KSZTAŁCENIA	19
4. METODY, TECHNIKI I FORMY PRACY	25
5. OCENIANIE OSIĄGNIĘĆ UCZNIÓW	31
6. EWALUACJA PROGRAMU	35
7. PODSUMOWANIE	37
Bibliografia	39

1. WSTĘP

Program nauczania to zapis zamierzonych zdarzeń edukacyjnych obejmujący zakładane wyniki uczenia się, czynności uczniów odnoszące się do określonego materiału nauczania oraz niezbędne warunki do skutecznego i sprawnego uczenia się. Niniejszy program nauczania dotyczy nauczania matematyki w szkole branżowej II stopnia. Od roku szkolnego 2022/2023 rekrutacja będzie uwzględniać absolwentów szkoły branżowej I stopnia po ośmioletniej szkole podstawowej. Po ukończeniu branżowej szkoły I stopnia uczeń może kontynuować kształcenie w branżowej szkole II stopnia w zawodach na poziomie technika, które posiadają kwalifikację wspólną z zawodem nauczonym w branżowej szkole I stopnia. Liczba godzin przewidziana w programie kształcenia z matematyki to 288 godzin rozłożonych na 2 lata. Niniejszy program nauczania jest kontynuacją oraz rozszerzeniem w zakresie treści programu nauczania matematyki w szkole branżowej I stopnia „Multimedialnie na matematyce I”.

Program nauczania oparty jest przede wszystkim na teorii kształcenia konstruktywistycznego (teorii J. Piageta (Wadsworth, 1998)), prowadzącego uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy w wyniku prowadzonej przez nich pracy badawczej, oraz na koncepcji czynnościowego nauczania matematyki stworzonej przez prof. Zofię Krygowską (podobnie jak program „Multimedialnie na matematyce I”). Koncepcja ta jest podstawową strategią poprawnego dydaktycznie procesu nauczania-uczenia się matematyki. Może być również interpretowana jako strategia odkrywania i tworzenia matematyki przez uczniów. Jest to metoda uniwersalna, jednak ze względu na abstrakcyjny i operatywny charakter pojęć matematycznych jest zalecana w procesie nauczania matematyki. Nauczanie czynnościowe stara się ukazywać matematykę od strony pojęciowej. Ważne są tutaj pojęcia, definicje, prawa, twierdzenia i rozumowania, a dopiero później, jako podsumowanie i ukoronowanie różnorodnych czynności, formułowanie i stosowanie algorytmów.

Nauczanie czynnościowe charakteryzuje się „dbałością o precyzję i porządek, o jasność i dobre rozumienie pojęć matematycznych, o zgodność pojęć szkolnych z pojęciami naukowymi” (cyt. za Siwek, 1998: 10). Celem nadrzędnym tej metody jest zdobywanie przez ucznia wiedzy operatywnej na podstawie zaplanowanej przez nauczyciela działalności ucznia. W metodzie czynnościowej realizuje się podejście konstruktywistyczne, w którym uczeń tworzy swoją wiedzę w integracji z otoczeniem, na drodze bogatych doświadczeń, pod kierunkiem nauczyciela i we współpracy z kolegami. W metodzie tej kładzie się duży nacisk w równej mierze na operatywne wiadomości, jak i na umiejętność ich zdobywania (również z zastosowaniem technologii ICT), stosowania, przetwarzania czy komunikowania. „Istnieje dość wyraźny związek tej metody z zasadą łączenia poznania z działaniem, odkrywanie nowych elementów wiedzy na drodze eksperymentalnej (...). W nauczaniu czynnościowym (...)

stroną aktywną na lekcji powinien być przede wszystkim uczeń, natomiast nauczyciel powinien pełnić rolę doradcy i inspiratora" (ibidem: 13).

Koncepcja czynnościowego nauczania matematyki opiera się z jednej strony na podstawach metodologicznych matematyki jako nauki (abstrakcyjność pojęć, dedukcja jako specyficzna metoda rozumowania i język werbalno-symboliczny), z drugiej zaś na psychologii kształtowania się pojęć u dziecka. Profesor Zofia Krygowska wypracowała koncepcję czynnościowego nauczania, którą charakteryzuje: „Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych” (cyt. za Krygowska, 1977: 127).

W czynnościowym nauczaniu matematyki należy wyróżnić dwie podstawowe zasady:

1. wydobycie przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie;
2. organizowanie sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego i świadomego posługiwania się stopniowo operacjami oraz konsekwentnego stosowania zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu.

Aby zrealizować w procesie nauczania matematyki w szkole branżowej II stopnia powyższe zasady, nieodzowną pomocą dydaktyczną stają się komputery. Niezwykle szybki rozwój techniki i technologii informacyjnej powoduje niemal równie szybkie zmiany w zakresie wymagań stawianych absolwentom szkół przystępującym do pracy. Edukacja powinna więc mieć charakter dynamiczny, nie przystosowywać jedynie do stanu obecnego, ale niejako przewidywać i wyprzedzać przyszłe warunki i potrzeby społeczne. Dlatego też nie można w nowoczesnej dydaktyce nie wykorzystać technologii cyfrowych. Rozpowszechnienie technik informacyjnych poprzez dostęp do smartfonów, tabletów i komputerów stwarza szansę nauczania i uczenia się w sposób nowy, zindywidualizowany, skupiony na rozwoju ucznia, kształtujący jego twórczą postawę i problemowe podejście do zadań. Warto uświadomić sobie (za Rybak, 2016: 5), że komputery w nauczaniu mogą być wykorzystane w wielu aspektach, z których najważniejsze to:

- komputer jako niemal niewyczerpane źródło informacji, pozwalające przenieść ciężar kształcenia z treści na umiejętności,
- komputer jako nowoczesny środek dydaktyczny, który – pod warunkiem odpowiednio dobranego i wykorzystanego oprogramowania edukacyjnego – pozwala na obrazowanie poznawanych treści, symulowanie i modelowanie procesów i zjawisk, ćwiczenie umiejętności w indywidualnym tempie itd. Komputer pomaga stawiać hipotezy i weryfikować je, rozpatrywać wiele

przypadków danego zagadnienia, szybko wykonuje żmudne obliczenia, precyzyjnie rysuje wykresy najbardziej skomplikowanych funkcji.

- Niniejszy program nauczania jest propozycją kształcenia poprzez inspirowanie uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy matematycznej. Wykorzystanie komputera będzie nieocenioną pomocą, która niesie korzyści dla rozwoju indywidualnego uczniów (podobnie jak w szkole branżowej I stopnia).

Poprzez takie multimedialne podejście do nauczania matematyki program zakłada odejście od stereotypów – wyjście poza ramy obowiązującego systemu edukacji, pozostając jednakże w zgodzie z obowiązującymi przepisami prawa oświatowego. Ucznia ma cechować odkrywczność i wynalazczość, przez co program rozwija umiejętności ponadprzedmiotowe/universalne ucznia (np.: umiejętność kreatywnego rozwiązywania problemów, pracy w zespole itp.) oraz wpływa na jego wszechstronny rozwój. Dodatkowo uczeń nabywa kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, a także kompetencje cyfrowe, przez co program wprowadza nowe formy kształtowania postaw i umiejętności niezbędnych na rynku pracy. Program nauczania uwzględnia zalecenia MEN w zakresie edukacji włączającej. Największym terapeutą dla dziecka niepełnosprawnego jest jego grupa rówieśnicza i pełne w niej uczestniczenie. Praca z komputerem wspomaga odkrywczność każdego człowieka. Zgodnie z nowymi przepisami poradnie psychologiczno-pedagogiczne mają za zadanie wspomóc szkołę w organizowaniu zespołów dla uczniów o specjalnych potrzebach edukacyjnych. Pomoc psychologiczno-pedagogiczna udzielana uczniowi w szkole branżowej II stopnia polega na rozpoznawaniu i zaspokajaniu indywidualnych potrzeb rozwojowych i edukacyjnych ucznia oraz rozpoznawaniu indywidualnych możliwości psychofizycznych ucznia i czynników środowiskowych wpływających na jego funkcjonowanie w szkole branżowej II stopnia w celu wspierania potencjału rozwojowego ucznia i stwarzania warunków do jego aktywnego i pełnego uczestnictwa w życiu szkoły oraz w środowisku społecznym (Dz.U. z dnia 25 sierpnia 2017 r., poz. 1591). Należy stworzyć różne formy pomocy i wsparcia. Pokazywanie dobrych praktyk jest tu dobrym przykładem przełamania stereotypów i lęków związanych z edukacją włączającą.

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na trzech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, kształceniu sprawności rachunkowej i przekazywaniu wiedzy o właściwościach obiektów matematycznych. Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona, rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu. Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki, nawet obecnie, kiedy

wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne właściwości obiektów rzeczywistych (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467).

2. CELE KSZTAŁCENIA – OGÓLNE I SZCZEGÓŁOWE

Celem edukacji w branżowej szkole II stopnia jest przygotowanie uczniów do uzyskania kwalifikacji zawodowych, a także, jak w przypadku innych typów szkół, do pracy i życia w warunkach współczesnego świata. Poza kształceniem zawodowym branżowa szkoła II stopnia ma za zadanie wyposażyć uczniów w odpowiedni zasób wiedzy ogólnej, która stanowi fundament wykształcenia, otwierając proces uczenia się przez całe życie.

W szczególności uczniowie po ukończeniu szkoły są przygotowani do zdania egzaminu maturalnego. Kształcenie ogólne w branżowej szkole II stopnia stanowi kontynuację kształcenia ogólnego w branżowej szkole I stopnia.

Celem kształcenia matematycznego w szkole branżowej II stopnia jest kształtowanie kreatywnych postaw i asertywnych zachowań związanych z wykształceniem umiejętności matematycznych stosowanych w praktycznej działalności, a między innymi w poznawaniu i rozumieniu problematyki rozwoju kraju i świata. Należy wyposażyć uczniów w „podstawowe metody i narzędzia przydatne do opisu zjawisk dotyczących różnych aspektów życia oraz działalności człowieka, a także do funkcjonowania we współczesnym świecie, również poprzez wsparcie pozostałych gałęzi wiedzy” (cyt. za Borgensztajn, 2018: 32). Wśród ogólnych celów kształcenia matematyki w szkole branżowej II stopnia można wyróżnić:

- w zakresie sprawności rachunkowej: wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych;
- w zakresie wykorzystania i tworzenia informacji:
 - » interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel;
 - » używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych;
- w zakresie wykorzystania i interpretowania reprezentacji:
 - » stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych;
 - » dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych;
 - » tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu;

- » wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań;
- w zakresie rozumowania i argumentacji:
 - » przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu;
 - » dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności;
 - » dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia;
 - » stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467).

Wiedza nabywana przez uczniów szkoły branżowej II stopnia powinna stanowić podstawę do kształtowania określonych umiejętności i postaw. Dziedzina matematyki obejmuje solidną umiejętność liczenia, znajomość miar, struktur, podstawowych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź (Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej 2018/C 189/01). Wymagane jest zatem rozwijanie umiejętności stosowania procedur matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych (np. umiejętności finansowe), a także umiejętności śledzenia i dokonywania prób oceny ciągu argumentów. Każdy uczeń w zakresie swoich możliwości powinien rozumować w matematyczny sposób, komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich środków dydaktycznych. Proces kształtowania postaw podczas lekcji matematyki powinien dotyczyć nabywania szacunku dla prawdy, rozbudzania ciekawości poznawczej, chęci i wytrwałości podczas poszukiwania przyczyn i oceniania zasadności podjętych decyzji zarówno w aspekcie podejmowania inicjatyw, jak i pracy zespołowej.

Analizując Zalecenia Rady Unii Europejskiej z dnia 22 maja 2018 roku w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie, do głównych celów nauczania matematyki można zaliczyć:

- umiejętność logicznego i analitycznego myślenia, wskazanego w każdej dziedzinie życia;
- sprawność interpretowania wyniku i konstruowania wniosków;
- umiejętność analizowania i interpretowania danych, organizacji czasu, prezentowania wyników i osiągnięć;
- umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania zagadnień wynikających z codziennych doświadczeń;
- umiejętność precyzyjnego formułowania myśli w mowie i piśmie;
- rozumienie terminów i pojęć matematycznych;

- umiejętność interpretacji i przetwarzania tekstu matematycznego;
- kształtowanie wyobraźni przestrzennej;
- umiejętność budowania modeli matematycznych dla różnorodnych sytuacji z życia powszedniego oraz ich wykorzystywania do rozwiązywania problemów praktycznych;
- zdolność do wykorzystywania logicznego i racjonalnego myślenia do weryfikowania hipotez i wyciągania wniosków;
- umiejętność szacowania i przewidywania wyników;
- kształtowanie spostrzegawczości;
- umiejętność zbierania, porządkowania i analizy danych oraz ich interpretacji;
- umiejętność rozumowania na podstawie podanego modelu;
- umiejętność dostrzegania związków i analogii w matematyce;
- umiejętność budowania algorytmów i posługiwania się nimi;
- rozbudowanie świadomości intelektualnej ukierunkowanej na kontynuację nauki;
- umiejętność rozwiązywania problemów w twórczy sposób;
- odpowiedzialne korzystanie z technologii cyfrowych i interesowanie się nimi do celów uczenia się, pracy i udziału w społeczeństwie;
- świadomość prawnych i etycznych zasad związanych z korzystaniem z technologii cyfrowych.

Ważnym zadaniem branżowej szkoły II stopnia jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Naprzeciw temu żądaniu wychodzi niniejszy program nauczania „Multimedialnie na matematyce II”. Nauczyciele matematyki powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji, z zastosowaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych. Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci. Ponieważ środki społecznego przekazu odgrywają coraz większą rolę zarówno w życiu społecznym, jak i indywidualnym, nauczyciel matematyki powinien poświęcić dużo uwagi edukacji medialnej, czyli wychowaniu uczniów do właściwego odbioru i wykorzystania mediów (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467).

Treści nauczania

Uczniowie, na których jest ukierunkowany program, są uczniami, którzy po ukończeniu branżowej szkoły I stopnia kontynuują kształcenie w branżowej szkole II stopnia w zawodach na poziomie technika, które posiadają kwalifikację wspólną z zawodem

nauczonym w branżowej szkole I stopnia. Wprowadzenie nowych treści w szkole branżowej II stopnia poprzedza powtórzenie wiadomości niezbędnych dla ich zrozumienia z wcześniejszych etapów edukacyjnych, w szczególności treści poznanych w branżowej szkole I stopnia. Umożliwia to łagodne przejście do nowych treści, oswojenie się ucznia z nową szkołą oraz sprawdzenie i wyrównanie poziomu uczniów, którzy trafiają do branżowej szkoły II stopnia z branżowej szkoły I stopnia.

W programie wprowadza się następujący podział godzin: klasa I 5/5, klasa II 4/4, zakładając, że semestr trwa 16 tygodni, co razem daje 288 godzin lekcji matematyki (Dz.U. z dnia 31 marca 2017 r., poz. 703). W klasie I jedna lekcja w tygodniu będzie trwała 2 x 45 min w każdym semestrze, czyli lekcja matematyki będzie cztery razy w tygodniu. W klasie II jedna lekcja w tygodniu będzie trwała 2 x 45 min w każdym semestrze, czyli lekcja matematyki będzie trzy razy w tygodniu. Powodowane jest to tym, iż uczniowie, zgodnie z zasadą konstruktywizmu oraz nauczaniem czynnościowym, będą starać się samodzielnie prowadzić prace badawcze, inspirowani przez nauczyciela odpowiednimi pytaniami, i będą uczestniczyli w planowaniu kolejnych kroków. Wydłużony czas trwania lekcji jest też niezbędny, aby przeprowadzić tę lekcję z użyciem komputera i zakończyć daną pracę badawczą. Można też tak zorganizować plan pracy szkoły, aby dwie lekcje matematyki w tygodniu odbywały się w pracowni komputerowej, aby każdy uczeń miał dostęp do stanowiska komputerowego. Podnosi to poziom kompetencji cyfrowych uczniów.

W klasie I będą wprowadzone nowe pojęcia związane z logarytmowaniem, wyrażeniami wymiernymi, podstawowymi zagadnieniami dotyczącymi funkcji wykładniczej i logarytmicznej oraz stosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów. Taki wybór treści nauczania pozwala nauczycielowi na utrwalenie wiadomości zdobytych przez uczniów na wcześniejszych etapach edukacji. W klasie II wprowadzono ciągi, geometrię analityczną na płaszczyźnie kartezjańskiej, rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki – w zakresie umożliwiającym zrozumienie i zastosowanie zdobytej wiedzy w praktyce. W związku z powyższym kolejność realizacji treści nauczania (liniowo, koncentrycznie, spiralnie) wraz z odniesieniem do podstawy programowej z matematyki dla branżowej szkoły II stopnia przedstawiona jest poniżej. Zgodnie z teorią konstruktywizmu i metodą czynnościowego nauczania matematyki opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w branżowej szkole II stopnia przedstawiony jest w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji (Dz.U. z dnia 16 listopada 2018 r., poz. 2153). W nawiasie zaproponowana jest orientacyjna liczba godzin przeznaczona do realizacji na dane hasło programowe. Liczba ta jest jednak uzależniona od specyfiki klasy. Rozsądny nauczyciel powinien ją dostosować do możliwości i potrzeb swoich uczniów.

Klasa I

I Liczby rzeczywiste (26 h). Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; stosuje pojęcie procentu w obliczeniach (zadania dotyczące lokat i kredytów, wynagrodzenie brutto i netto);
- 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, nie trudniejsze niż:
 - a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
- 3) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 4) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$; zaś gdy $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$; oraz $a^x < a^y < a^z$ dla $x < y < z$ i $a > 1$; oraz $a^x > a^y > a^z$ dla $x < y < z$ i $0 < a < 1$;
- 5) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;
- 6) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

II. Wyrażenia algebraiczne (24 h). Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$ ($a + b$)³;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$
 $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
- 4) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 5) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- 6) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
- 7) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne w przypadkach nie trudniejszych niż:
 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

III. Równania (24 h). Uczeń:

- 1) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 2) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

- 3) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$ $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdy wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

V. Funkcje (24 h). Uczeń:

- 1) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 2) wykorzystuje własności funkcji liniowej, kwadratowej i funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ do rozwiązywania zadań, również w zastosowaniach praktycznych;
- 3) posługuje się funkcjami: wykładniczą i logarymiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

VII. Trygonometria (16 h). Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicję funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° ;
- 2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- 3) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta
 $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$;
- 4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII Planimetria. (24 h) Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (stosuje m.in. twierdzenie cosinusów), stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 3) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 4) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- 5) przeprowadza dowody geometryczne.

XI. Kombinatoryka (12 h). Uczeń zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:

- 1) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2;

2) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1. Razem w klasie I 150 h + 10 h do dyspozycji nauczyciela (suma: 160 h).

Klasa II

VI. Ciągi (18 h). Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie jak w przykładach:

$$a) \begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n-1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n) \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n-1} = -a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n) \end{cases}, \quad b) \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_{n-1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n) \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n-2} = a_{n+1} + a_n \end{cases};$$

- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym, czy geometrycznym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

IV. Układy równań (8 h). Uczeń:

- 1) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych; stosuje układy nierówności liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych (zagadnienia programowania liniowego na płaszczyźnie);
- 2) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci

$$\begin{cases} ax + by = e \\ ax^2 + by^2 = e + f \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} ax + by = e \\ y = x^2 + dx + f \end{cases}$$

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej (24 h). Uczeń:

- 1) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (przechodzenie przez dwa dane

punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu itp.);

- 2) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- 3) oblicza odległość punktu od prostej;
- 4) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- 5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych oraz w symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

X. Stereometria (24 h). Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastostupach i ostrostupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastostupów, ostrostupów, walców, stożków i kul, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (14 h). Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

XIII. Optymalizacja (12 h). Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Razem w klasie II 100 h + 28 h do dyspozycji nauczyciela na ewentualne przygotowanie do matury (suma: 128 h).

W prezentowanym układzie nauczania można w klasie drugiej do działu Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej zastosować równoległe treści z działu Układy

równań. Uczeń potrafi rozwiązywać układy równań ze szkoły branżowej I stopnia. Tutaj nauczyciel może pokazać metodę wyznacznikową rozwiązywania układów równań liniowych. Równania, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, można rozwiązywać równoległe do metody podstawiania za pomocą metody geometrycznej znajdowania punktów wspólnych prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej. Autorski układ treści nauczania będzie możliwy do indywidualnego zastosowania przez nauczyciela. Można go modyfikować, co nie zmieni głównej koncepcji programu opartej na głębokiej znajomości procesu nauczania. Z treści wykraczających poza podstawę programową zaproponowano przypomnienie pojęcia procentu w obliczeniach (zadania dotyczące lokat i kredytów, wynagrodzenie brutto i netto) oraz układy nierówności liniowych stosowane do rozwiązywania zadań tekstowych. Niezbędne jest takie zastosowanie matematyki dla młodych ludzi wkraczających w świat zawodowej działalności i związanych z tym podatków oraz problemu optymalnej produkcji.

Zaproponowany układ treści uwzględnia wiek i zainteresowania uczniów. Określa on uczniom powinności i daje zbiór tematów z wybranych obszarów wiedzy. Nauczyciel powinien przekazać wiadomości uczniom z uwzględnieniem wieku i zainteresowania, a oni powinni przyswoić sobie ich treść. Zaproponowany układ treści jest adekwatny także do potrzeb uczniów, w tym uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. W edukacji powinna spełniać się idea jedności w zróżnicowaniu. Oznacza to tworzenie takich warunków, w których – uznając indywidualne potrzeby i możliwości młodzieży – zapewnia się wspólne kształcenie wszystkim uczniom, ze szczególnym uwzględnieniem uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Na liście szczegółowych celów kształcenia i wychowania niezbędnych do pracy w warunkach edukacji włączającej powinny znaleźć się między innymi:

- zaszczepienie u młodzieży matematycznej ciekawości;
- kształtowanie pozytywnej motywacji do podejmowania zadań wymagających wysiłku umysłowego;
- aktywizowanie uczniów, zachęcanie do podejmowania inicjatywy i realizowania własnych pomysłów;
- zapewnienie sukcesów wszystkim uczniom każdego dnia;
- podejmowanie i kontynuowanie działalności matematycznej z własnej chęci i w poczuciu odpowiedzialności;
- odczuwanie satysfakcji z własnej aktywności matematycznej i z jej wyników;
- doznawanie w trakcie uczenia się matematyki poczucia swobody, bezpieczeństwa i podmiotowości;
- świadome projektowanie (generowanie) i wykonywanie oraz sprawdzanie i ocenianie w samodzielnym działaniu własnych pomysłów matematycznych;
- osiągnięcie poprzez własną aktywność matematyczną czegoś dla siebie i nowego, i wartościowego;

- posiadanie świadomości odkrycia lub stworzenia pożytecznej nowości matematycznej samodzielnym wysiłkiem;
- elastyczność i wysoka tolerancja dla odmienności (Kožuch, Pietruszka, 2011; Zaremba, 2014: 81)

3. ORGANIZACJA WARUNKÓW I SPOSÓB REALIZACJI KSZTAŁCENIA

Istotnym czynnikiem w rozwijaniu umiejętności uczenia się jest podejmowanie przez szkołę działań kształtujących pozytywny klimat dla uczenia się. Szkoła, wyposażając uczniów w kompetencje, powinna również ukształtować ich przekonanie, że chęć uczenia się (wraz z innymi kompetencjami) będzie kapitałem, który pozwoli im rozwijać się przez całe dorosłe życie. Działania te obejmują angażowanie uczniów w proces planowania i realizacji przedsięwzięć edukacyjno-wychowawczych oraz współtworzenie relacji panujących w szkole. Program nauczania matematyki w szkole branżowej II stopnia „Multimedialnie na matematyce II” postuluje:

- sterowanie tak uczeniem się matematyki, by rozwijało się ono w toku wielostronnej aktywności matematycznej ucznia,
- wypracowanie odpowiednich środków i zabiegów dydaktycznych umożliwiających dostęp do abstrakcji matematycznych i ułatwiających uczenie się matematyki,
- szukanie wewnętrznych motywacji dla uczenia się tego przedmiotu,
- uprzyjemnianie uczenia się matematyki.

Program zakłada również umiejętność dowodzenia. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Umiejętność formułowania poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody powinien uczeń poznać na matematyce w branżowej szkole II stopnia.

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x - a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.
6. Wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
 - a) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;

- b) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na łukach równej długości.
8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym ACB , to $|AD| \cdot |DB| = |CD|^2$, $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ oraz $|AB| \cdot |CD| = |BC|^2$.
9. Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta CD jest dwusieczną kąta ACB w trójkącie ABC i punkt D leży na boku AB , to $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.
10. Wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.
11. Twierdzenie sinusów.
12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązаныmi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, np. przy analizie sondaży, zagadnieniach z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu, i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas gdy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują. Omawianie wartości oczekiwanej nie wymaga wprowadzania pojęcia zmiennej losowej. Wskazane jest raczej posługiwanie się intuicyjnym rozumieniem wartości oczekiwanej zysku czy ustalanie liczby obiektów spełniających określone własności. W ten sposób uczeń ma możliwość dostrzeżenia związków prawdopodobieństwa z życiem codziennym, ma także szanse kształtowania umiejętności unikania zachowań ryzykownych, np. przy decyzjach finansowych.

Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów, m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach. Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji oraz bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami

sieci. Szkoła oraz nauczyciele są obowiązani do podejmowania działań mających na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia stosownie do jego potrzeb i możliwości. Uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi nauczanie dostosowuje się do ich możliwości psychofizycznych i tempa uczenia się. Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu opisanych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467).

W realizacji powyższych zadań, szczególnie w odniesieniu do współczesnej młodzieży zafascynowanej komputerami, telefonami komórkowymi, filmami akcji i wideoklipami, przydatne stają się multimedia. W szkole XXI wieku multimedia to konieczność i przejaw nowoczesnego nauczania. Technologie cyfrowe wywierają wpływ na kształcenie, szkolenie i uczenie się, umożliwiając rozwój elastyczniejszych środowisk edukacyjnych dostosowanych do potrzeb wysoce mobilnego społeczeństwa. Program nauczania zakłada korzystanie z multimedialnych, aby inspirować uczniów do odkrywania matematyki. Kształcenie multimedialne to strategia realizacji procesu nauczania i uczenia się oparta na kompleksowym wykorzystaniu funkcjonalnie dobranych tradycyjnych (prostych) i technicznych (złożonych) środków dydaktycznych, czyli mediów (Bednarek, 2012). Podczas stosowania kształcenia multimedialnego pomoce naukowe mogą pełnić rolę:

- wizualizacyjną, umożliwiającą obrazowanie treści (z wykorzystaniem animacji i objaśnień słownych);
- narzędzia pracy badawczej ucznia – symulacje;
- źródła atrakcyjnych w formie i bogatych w treści ćwiczeń interaktywnych (Rybak, 2016: 32).

Spśród programów edukacyjnych z zakresu matematyki warto zwrócić uwagę na program **GeoGebra** do interaktywnego uczenia się przede wszystkim geometrii, ale nie tylko. Jest to program bezpłatny, ogólnodostępny, typu open-source, do pobrania pod adresem www.geogebra.org, opracowywany wspólnie przez programistów, nauczycieli, matematyków i użytkowników z całego świata. Można go zainstalować na różnych urządzeniach (komputery, tablety). Jest doskonały do pracy badawczej ucznia poprzez rozwijanie skojarzeń matematycznych pomiędzy różnymi działami matematyki (algebra, geometria, analiza matematyczna, statystyka itp.). Zawiera też wszechstronny sposób wizualizacji obliczeń (równania, wykresy, tabele), niezbędny dla zrozumienia tematu lekcji. Jednak przede wszystkim jest intuicyjny i przyjazny dla użytkownika, jego pliki mogą być łatwo przesyłane do sieci jako aplety, jak również konstrukcje mogą być eksportowane do różnych formatów (PNG, PDF, EPS itp.) (Pobiega, Skiba i Winkowska-Nowak, 2014: 9). Największą zaletą programu jest jego dynamika: „możliwość poruszania utworzonymi obiektami połączona z samoistnym uaktualnianiem obiektów zależnych i wartości liczbowych” (Rybak, 2016: 55). Program

GeoGebra powinien być głównym narzędziem badawczym dla ucznia podczas realizacji działań z zakresu geometrii i zagadnień dotyczących funkcji. Uczeń jest w stanie szybko zwizualizować dany problem. Programy typu GeoGebra są wykorzystywane w nauczaniu w podejściu konstruktywistycznym, w którym głównym założeniem jest to, że uczeń sam tworzy swoją wiedzę. Według tej koncepcji odbywa się to w sposób wysoce zindywidualizowany i narzędzia, dzięki którym można zwizualizować dane pojęcie w różnych formach, są wysoce pożądane (Winkowska-Nowak, Hohenwarter, Zdrowska, 2011: 14). Pomocne są tutaj też gotowe rozwiązania prezentowane na stronie Warszawskiego Centrum GeoGebry przy SWPS w Warszawie, gdzie stale rozwija się dostępna bezpłatnie baza materiałów edukacyjnych w języku polskim.

Spośród oprogramowania biurowego warto wykorzystać do realizacji zagadnień z zakresu procentów (lokaty i kredyty, podatek VAT), funkcji liniowej, wykładniczej i logarytmicznej, ciągów oraz statystyki **arkusz kalkulacyjny**.

Spośród portali edukacyjnych jako repozytoriów elektronicznych materiałów dydaktycznych można polecić portal **Scholaris**. Zasoby w nim umieszczone są recenzowane oraz mają ujednoliconą formę graficzną i akustyczną. W portalu tym można zwrócić uwagę na te materiały, które w sposób istotny przyczyniają się do obrazowania treści lub stanowią źródło ćwiczeń interaktywnych.

Portal **E-podręczniki** to całe środowisko uczenia się i nauczania. Daje możliwość pracy w zespołach i dopasowuje się do indywidualnego stylu nauki. Zasoby w portalu mogą się dynamicznie zmieniać. E-podręczniki to bezpłatne i dostępne dla wszystkich materiały edukacyjne.

LearningApps.org jest aplikacją Web 2.0 wspierającą proces uczenia się i nauczania za pomocą małych interaktywnych modułów. Istniejące moduły – gry dydaktyczne – mogą być bezpośrednio wykorzystywane w nauczaniu lub też zmieniane, a nowe mogą być tworzone przez użytkowników w internecie. Celem jest zebranie aplikacji wielokrotnego użytku i udostępnienie ich publicznie. Aplikacje nie zawierają zatem żadnych specjalnych ram lub konkretnego scenariusza lekcji: są ograniczone wyłącznie do interaktywnej części. Aplikacje nie stanowią zatem jednostki lekcyjnej, lecz muszą być osadzone w odpowiednim scenariuszu nauczania. W aplikacji LearningApps uczniowie nie muszą być biernymi użytkownikami materiałów przygotowanych przez nauczyciela. Sami mogą opracowywać gry dydaktyczne, co może stać się czynnikiem aktywizacyjnym wspomagającym zaangażowanie uczniów w poznawanie realizowanego materiału (Kwiecień, 2016: 20). Zasoby umieszczone w portalu nie są recenzowane, zatem nauczyciel musi bardzo starannie dobrać aplikacje.

Program **Wolfram Alpha** to nowoczesne narzędzie edukacyjne o potężnym potencjale, działające bardzo inteligentnie, rozumiejące zadane pytania, które można formułować na wiele sposobów. Program ten to przede wszystkim nowoczesny multimedialny kalkulator, który między innymi przyspiesza obliczenia, podaje interpretację graficzną naszych rozważań, pozwala sprawdzić obliczenia przy

rozwiązywaniu równań i nierówności, układów równań i nierówności itp. Pracując z tym programem, uczeń rozwija kompetencje informatyczne, gdyż w programie należy wpisać odpowiednie instrukcje (formuły, polecenia) w sposób bardzo precyzyjny i poprawny logicznie, oraz kompetencje językowe, gdyż program Wolfram Alpha jest anglojęzyczny. Uczeń podczas pracy na lekcji matematyki uczy się podstawowych zwrotów matematycznych w języku angielskim, przez co taka forma nauczania doskonali ten język. Dzięki wykorzystaniu programu Wolfram Alpha lekcje matematyki stają się bardziej atrakcyjne, a nauczyciel bez wątpienia staje się nowoczesnym nauczycielem, który przy tej okazji również się rozwija i poznaje najnowsze technologie komputerowe (Grębski, 2018: 9–12).

Inne godne polecenia miejsca w sieci z materiałami do nauczania matematyki to:

Akademia Khana – oferuje praktyczne ćwiczenia, filmy instruktażowe i panel indywidualnych planów nauczania, który daje uczniom możliwość pracy we własnym tempie w klasie i poza nią, co jest szczególnie ważne dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

Matemaks.pl – matematyka maksymalnie prosta, serwis autorstwa Michała Budzyńskiego, podzielony na działy tematyczne, bogaty w materiał wprowadzający w wybrane zagadnienia oraz przykłady rozwiązywania zadań, również w formie filmowej. Na stronie dostępny jest także interaktywny program do rysowania funkcji. Dla uczniów szkoły branżowej II stopnia wystarczą materiały z matematyki bez konieczności logowania się do serwisu.

Portal **medianauka.pl** to między innymi rozbudowany kurs matematyki ilustrowany ciekawymi zadaniami, przykładami, animacjami, aplikacjami oraz interakcyjnymi tablicami, gdzie nauczyciel może wybrać materiały przydatne dla jego uczniów na danej jednostce lekcyjnej.

matematyka.pisz.pl, gdzie Jakub Grzegorzek od wielu lat pomaga w nauce matematyki. Materiał na tej stronie jest podzielony tematycznie i obejmuje program dawnego gimnazjum, liceum i niektóre zagadnienia ze studiów.

Serwis **MegaMatma.pl**, założony przez pasjonatów matematyki, charakteryzuje się tym, że zawarta jest w nim wiedza z matematyki na każdy poziom edukacji. Autorskie treści tworzone są przez matematyków, egzaminatorów i autorów podręczników. Zawartość jest na bieżąco uzupełniana i aktualizowana do wymagań szkolnych. Serwis posiada także e-zasoby, które mogą zastąpić tradycyjny podręcznik, zbiór zadań czy tablice.

The Mathteacher – portal matematyczny prowadzony przez Tomasza Grębskiego (tomaszgrebski.pl), gdzie oprócz klasycznych tematów matematycznych można podejrzeć bardzo dużo materiałów dodatkowych i nietypowych z matematyki, które mogą urozmaicić lekcję i zaciekać ucznia matematyką. Na portalu są też wybrane z sieci gry logiczne, które wspomagają proces uczenia się matematyki, szczególnie u uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

Uczeń może osiągnąć swój potencjalny rozwój wtedy, gdy będzie odnosił sukcesy w procesie kształcenia, a słaby uczeń napotykał trudności będzie mógł pokonać z wyrozumiałym nauczycielem. Dlatego istotne jest zastosowanie indywidualizacji nauczania, która jest niezbędnym elementem kształcenia matematycznego. Różnorodność metod pracy na lekcji oraz urozmaicony warsztat pracy nauczyciela powodują, że lekcje są bardziej ciekawe i angażujące ucznia. W internecie zamieszczonych jest wiele różnych materiałów – wybór należy do nauczyciela.

Odpowiednio zbudowana przestrzeń edukacyjna powinna wspierać cele edukacyjne, w tym wychowawcze, powinna ułatwić uczniom i nauczycielom kształtowanie właściwych podejść do uczenia się i nauczania. W programie „Multimedialnie na matematyce II” obowiązuje system nauczania klasowo-lekcyjny, jednakże uzupełnieniem zajęć mogą być wszelkiego rodzaju wyjścia studyjne, które integrują międzyprzedmiotowe treści kształcenia w zawodzie szkolnictwa branżowego, np. wyjście do zakładu pracy związanego z konkretną branżą. Przestrzeń do nauki matematyki powinna z nią współgrać, np. poprzez odpowiednio zaaranżowane plansze edukacyjne, gazetki ściennie w klasie obrazujące przerabiany aktualnie materiał lub kącki zadaniowe oraz wydzielone miejsce na środki dydaktyczne samodzielnie przygotowane przez uczniów. W szkole może być jedna klasopracownia do nauki matematyki i informatyki lub innego przedmiotu ścisłego związanego z zawodem szkolnictwa branżowego. Każda sala lekcyjna powinna mieć dostęp do internetu, uczniowie i nauczyciele powinni mieć zapewniony dostęp do pracowni stacjonarnej lub mobilnej oraz możliwość korzystania z własnego sprzętu. Wszystkie pracownie powinny być wyposażone w monitor interaktywny (z wbudowanym komputerem i oprogramowaniem) lub zestaw: komputer, projektor i tablica interaktywna lub ekran (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467). W tworzenie treści widocznych na tablicy multimedialnej, które można następnie zapisać w pliku, np. z nazwą klasa_data_zajęć, powinni mieć wkład różni uczniowie z klasy. Plik ten może być rozesłany w formie poczty elektronicznej uczniom – jest to nowy sposób sporządzania notatek lub obrazowania różnorodnych sposobów rozwiązywania tego samego zadania. Implementuje to założenia idei konstruktywizmu oraz teorii czynnościowego nauczania do praktyki szkolnej. Uczeń sam tworzy swoją wiedzę. Także uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi mogą być aktywizowani w ten sposób – będą czuć, że są akceptowani i cenieni, że trud, jaki wkładają w naukę, jest zauważany, oraz że będą oceniani sprawiedliwie. Informację, jak powinna być wyposażona pracownia matematyczna w szkole ponadpodstawowej, można odnaleźć w opracowaniu Katarzyny Wróbel i Mariki Stasiak „Model funkcjonowania pracowni przedmiotowej z matematyki w szkole ponadpodstawowej”.

4. METODY, TECHNIKI I FORMY PRACY

Nauczyciel, pracując z uczniami od pierwszego spotkania z nimi, zaczyna budować w klasie atmosferę, która towarzyszy uczeniu się. Jeśli z klasą pracuje kilku nauczycieli, wszyscy wnoszą wkład w tworzenie atmosfery w specyficzny dla siebie sposób, wprowadzając elementy składające się na rozbudzenie w klasie ciekawości poznawczej, poczucia, że nauka jest wartością, potrzeby uczenia się i rozwijania umiejętności przydatnych w dalszej nauce oraz w życiu. Nie ma gotowych recept na skuteczne budowanie atmosfery sprzyjającej uczeniu się, ale warunkiem jej istnienia jest twórcze podejście nauczyciela, jego potrzeba doskonalenia się, a przede wszystkim dobra współpraca z uczniami, którzy muszą uwierzyć, że nauczyciel to ich sojusznik.

Zgodnie ze Strategią Rozwoju Kapitału Społecznego (Uchwała Nr 61 RM z dnia 26 marca 2013 r.) w ramach edukacji formalnej należy kształtować kompetencje uczniów, stosując metody nauczania sprzyjające kooperacji, kreatywności, komunikacji, praktycznemu i eksperymentalnemu wykorzystywaniu wiedzy oraz indywidualizacji pracy z uczniami. Pojawia się również potrzeba kształcenia i doskonalenia nauczycieli w zakresie rozwijania kompetencji społecznych wśród uczniów.

Nauczyciel, diagnozując indywidualne możliwości i preferencje uczniów, decyduje o doborze metod nauczania, form i środków dydaktycznych oraz tempie realizacji treści nauczania. W swojej pracy nauczyciel musi być efektywny, musi wybierać spośród metod nauczania najlepsze i tak przygotowywać lekcję i sterować nią, aby odpowiadała ona indywidualnym potrzebom uczniów, również tych ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Nauczyciel, przygotowując się do lekcji, ustalając jej cele, redagując konspekt, może się zastanowić, jaką metodę pracy wybrać. Jednakże zawsze powinien kłaść nacisk na przewagę metod aktywizujących (zgodnie z zasadą konstruktywizmu) nad metodami podawczymi tak, aby uczeń miał możliwość budowania własnej wiedzy poprzez dynamiczne i wzajemne oddziaływanie uczącego się i otoczenia.

Do realizacji niniejszego programu stosowane są takie metody nauczania matematyki, które wywołują aktywność uczniów oraz dzięki którym możliwe będzie zrealizowanie celów w danej sytuacji dydaktycznej, między innymi:

- Pogadanka problemowa, dyskusja, burza mózgów – nauczyciel kieruje rozmową, umiejętnie prowadzi dyskusję oraz porządkuje jej przebieg. Zadaje pytania, naprowadza na prawidłowe odpowiedzi, rozjaśnia wątpliwości, rozstrzyga spory. Uczniowie dyskutują, formułują spostrzeżenia, wymieniają się doświadczeniami, argumentują, spierają się, wyciągają wnioski.
- Metoda problemowa (rozwiązywanie problemów) – nauczyciel stawia przed uczniami pewien problem matematyczny, który uczniowie samodzielnie rozwiązują. Uczniowie zmuszeni są do dużego wysiłku intelektualnego. Analizują problem, formułują hipotezę, weryfikują ją, w razie potrzeby wyjaśniają

wątpliwości z nauczycielem, budują model rozwiązania problemu, dokonują korekt, podsumowują swoje spostrzeżenia i wnioski, sprawdzają obliczenia, formułują odpowiedź. Ta metoda kształci umiejętność rozwiązywania problemów, wzbogaca wiedzę uczniów i aktywizuje ich w procesie kształcenia.

- Metoda 66 (6-osobowe zespoły mają 6 minut na rozwiązanie problemu) rozwija umiejętność skutecznego porozumiewania się i prezentowania własnego punktu widzenia, efektywnego współdziałania w zespole, podejmowania decyzji indywidualnych i grupowych, tym samym odpowiedzialności za siebie i grupę.
- Praca z tekstem matematycznym – polega na samodzielnym przeczytaniu fragmentu tekstu i zapoznaniu się z definicjami i twierdzeniami oraz ze sposobami rozwiązywania zadań. Kształci umiejętność czytania tekstu matematycznego ze zrozumieniem, analizowania definicji i twierdzeń oraz śledzenia algorytmów rozwiązywania niektórych zadań.
- Praca z komputerem – zbieranie informacji z internetu dotyczących różnych zagadnień matematycznych, samodzielne przygotowanie referatów na podstawie zebranych informacji i przedstawienie ich, po odpowiednim opracowaniu, pozostałym uczniom. Metoda pozwala kształtować postawy poszukiwania i dociekliwości, daje szansę rozwoju i głębszego poznania matematyki oraz możliwość autoprezentacji. Szczególnie pomocnym wydaje się tutaj zastosowanie programu Wolfram Alpha, przy pomocy którego można stworzyć dowolny projekt matematyczny.
- Gry dydaktyczne – można wykorzystać gotowe aplikacje dostępne w internecie, jak również uczniowie mogą sami wykonać takie gry, np. domino matematyczne, krzyżówka matematyczna, puzzle.
- Lekcja odwrócona – zmiana koncepcji lekcji: uczniowie najpierw w swoich domach (ewentualnie przed lekcją) zapoznają się z nowymi treściami (np. na smartfonach na YouTube), a w szkole na lekcji właściwej pogłębiają i utrwalają swoją wiedzę, ćwiczą umiejętności, rozwiązują problemy z wykorzystaniem wiedzy nauczyciela.
- Rozwiązywanie ciągu zadań – rozwiązywanie przez uczniów zestawu zadań. Ważne jest, aby zadania ułożone były w takiej kolejności, żeby rozwiązanie każdego następnego zadania pogłębiało wiedzę i umiejętności ucznia. Dobrze jest, gdy wśród zadań pojawiają się też takie, które mają ciekawą, nietypową treść lub zaskakujące rozwiązanie. Takiego rodzaju zadania i ćwiczenia w naturalny sposób pobudzają ciekawość i aktywność umysłową uczniów.

Ponadto ćwiczenia, rozwiązywanie zadań, powtarzanie, testy, które są szczególnie ważne dla uczniów przystępujących do egzaminu dojrzałości. Ciekawy wybór metod aktywizujących zawarty jest w pracy Agnieszki Pfeiffer „Konstruktywizm i metody aktywizujące w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży”.

Wymienione metody mogą występować w ciągu całej lekcji, ale mogą się również na jednej lekcji wzajemnie przeplatać. Zależy to od tematu lekcji i celów, które nauczyciel chce osiągnąć (Bryński i in., 1999: 35). Jednakże nauczanie matematyki odbywa

się zawsze poprzez rozwiązywanie z uczniami zadań i problemów. Należy uczniom różne kwestie wytłumaczyć, ale ostatecznym celem jest zadanie. Dopiero zadanie, postawienie konkretnego problemu, zmusza ucznia do myślenia samodzielnego, które jest najważniejszym celem nauczania. Nauczyciel powinien ukierunkować ucznia, jak należy myśleć nad zadaniem, jak zabrać się do rozwiązywania zadania i jak podążać do rozwiązania (Guzicki, 2013: 9). Całe działy matematyki w szkole branżowej II stopnia należy realizować poprzez rozwiązywanie odpowiednio przygotowanych ciągów zadań dobranych do możliwości realizacji idei konstruktywizmu oraz teorii czynnościowego nauczania. Za ich pomocą wprowadza się i kształtuje pojęcia, wykrywa i uzasadnia twierdzenia, stosuje zdobytą wiedzę, kształtuje umiejętności i nawyki, sprawdza, uzupełnia i koryguje wiadomości (Bryński i in., 1999: 35). Przy rozwiązywaniu zadań w razie niepowodzeń dobrym przykładem jest metoda dialogu, w której nauczyciel stawia pytania, a uczeń odpowiada na tak wiele z nich, na ile umie. Prowadzi to do samodzielnego rozumowania przez ucznia (Guzicki, 2013: 14).

Przerabiając tematy, które znane są z wcześniejszych etapów edukacji, jednak wymagają uzupełnienia i rozszerzenia w szkole branżowej II stopnia, warto zastosować technikę mapy pamięci. Szczególnie przydaje się to w realizacji zagadnień z planimetrii, gdy istnieje potrzeba przypomnienia wszystkich własności figur płaskich. Uczniowie podzieleni na grupy mogą zapisywać na planszach wszystko to, co pamiętają o wskazanych przez nauczyciela figurach płaskich. W ten sposób uczeń odnosi się twórczo do danego zagadnienia, przejrzysto zapisuje swoje wyniki lub przemyślenia kolegi. Taki rodzaj pracy pozwala na swobodne przeglądanie materiału oraz dokonywanie podsumowań (Wójtowicz, 2013: 23).

Formy pracy na lekcji matematyki występują trzy: indywidualna praca uczniów, praca uczniów w zespołach (grupach), praca całego zespołu (całej klasy, frontalna). Dostosowanie tych form do danej sytuacji dydaktycznej jest w gestii nauczyciela, ponieważ określenie formy pracy jest uzależnione od wiedzy całej grupy. Podział powinien uwzględnić ilość materiałów, którymi dysponuje prowadzący, i tak np.:

- Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowanie w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością – praca grupowa z pomocą naukową, jaką jest program GeoGebra lub arkusz kalkulacyjny. Poniższy przykład ilustruje zastosowanie logarytmu:

Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$ $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, zaś $A_0 = 10^{-4} A_0 = 0,0001$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

- W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania

(metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcenie tezy – praca indywidualna, praca frontalna, pogadanka z pomocą naukową, jaką jest program GeoGebra.

- Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych, i na odwrót – ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne. Jest tak np. przy rozwiązywaniu układu dwóch równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe – praca w grupach z wykorzystaniem programu komputerowego GeoGebra, rysowanie funkcji, modelowanie.
- Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy poznają sposoby konstruowania figur, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu. Konstrukcje można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra – praca indywidualna, w grupach, modelowanie, symulacja.
- Zagadnienia z działu Ciągi należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów na fakt, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany przy treściach nauczania w klasie II, w dziale VI, pkt 2) a) ciąg w postaci rekurencyjnej opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii. Można też zwrócić uwagę, że ciąg arytmetyczny to funkcja liniowa określona na zbiorze liczb naturalnych, a ciąg geometryczny to funkcja wykładnicza określona na zbiorze liczb naturalnych – praca w grupach z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego lub arkusza dostępnego w programie GeoGebra. Poniższy przykład ilustruje zastosowanie funkcji wykładniczej.

Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

Dzięki wymienionym metodom i formom pracy uczeń ma szansę rozwijania kompetencji kluczowych, jak np.:

- rozwijanie kompetencji matematycznych i kompetencji informatycznych poprzez realizację praktycznie wszystkich treści nauczania opisanych w podstawie programowej do matematyki i informatyki przez wykorzystywanie ICT na lekcjach matematyki;
- rozwijanie kompetencji naukowo-technicznych poprzez wszystkie działania mające na celu zastosowanie w praktyce wiedzy nabytej na zajęciach matematyki przez zadania i problemy koncentrujące się na życiu codziennym;
- rozwijanie umiejętności uczenia się oraz inicjatywności i przedsiębiorczości poprzez aktywności nakierowane na planowanie własnej pracy i osiągnięcie z góry zaplanowanych celów;
- rozwijanie kompetencji społecznych oraz umiejętności porozumiewania się w języku ojczystym poprzez wykorzystywanie narzędzi ICT do komunikowania się czy tworzenia prezentacji.

Praca z uczniem ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi

Zaproponowane metody i techniki pracy uwzględniają indywidualne potrzeby i możliwości uczniów, zapewniając wspólne kształcenie wszystkim, ze szczególnym uwzględnieniem uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Dają okazję do indywidualizacji pracy z uczniem. Indywidualizacja procesu nauczania-uczenia się to dostrzeganie indywidualnych różnic pomiędzy poszczególnymi uczniami w zakresie umiejętności, zdolności, potrzeb i zainteresowań, a następnie tworzenie im warunków do wszechstronnego rozwoju dokonującego się w procesie nauczania-uczenia się poprzez (Okoń, 1996: 191):

- akwizycję wiedzy (pośrednią i bezpośrednią, formalną i nieformalną), odkrywanie i dociekanie, przeżywanie i działanie;
- różnicowanie metod, technik nauczania, modeli interakcyjnych i tempa pracy stosownie do potrzeb, zainteresowań oraz możliwości umysłowych poszczególnych uczniów, w tym również uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Przykładowe karty pracy przedstawione są w pozycji Anny Płońskiej „Jak pokonać trudności z matematyką w szkole ponadgimnazjalnej” oraz „*Jak pokonać trudności z funkcjami na lekcjach matematyki w szkole ponadpodstawowej*”. Przykłady ćwiczeń i zadań z matematyki w postaci apletów GeoGebry dla uczniów ze SPE zawarte są w pracy Agaty Matuszczak „*Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi*” (różnicowanie zadań, pomoce multimedialne o różnym poziomie zaawansowania);
- indywidualizowanie procesu nauczania-uczenia się poprzez wdrażanie do rozpoznawania własnych stylów uczenia się.

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła powinna zorganizować zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla uczniów, którzy mają szczególne zdolności matematyczne. W przypadku uczniów zdolnych można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki.

Przydatność zaproponowanych metod wspomaga naturalne zainteresowania ucznia, jego dążenia do poszukiwania wiedzy oraz doskonalenia umiejętności, czyli kierowanie procesem uczenia się, co jest niezbędne na dzisiejszym rynku pracy. Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma także nabywanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami (Dz.U. z dnia 2 marca 2018 r., poz. 467).

„W obszarze metodyki pracy z uczniem należy dostosować sposoby nauczania do jego możliwości i potrzeb, uwzględniając zróżnicowane tempo operacji umysłowych, wahania nastroju, jak i poziomu aktywności umysłowej – związanych z poziomem funkcjonowania. Warto jest proponować nauczanie metodą projektów, które dają uczniowi możliwość regulowania swojego poziomu aktywności.” (cyt. za Zaremba, 2014: 74).

5. OCENIANIE OSIĄGNIĘĆ UCZNIÓW

Z procesem nauczania i uczenia się matematyki nieodłącznie wiąże się bieżąca kontrola wyników w nauce, którą podsumowują oceny semestralne i roczne wyrażone stopniami szkolnymi w skali od dopuszczającego do celującego. Opracowanie kryteriów oceniania i klasyfikowania w zakresie matematyki jest szczególnie trudne, ponieważ pojęcia, twierdzenia, rozumowania matematyczne mają charakter operatywny i stopień ich opanowania można dostrzec dopiero przy obserwowaniu różnych aktywności ucznia. Program nauczania „Multimedialnie na matematyce II” zaleca metody i narzędzia oceniania postępów ucznia takie jak:

- metoda ustnej kontroli, czyli przede wszystkim odpowiedzi uczniów na pytania nauczyciela, np. „skąd ten wniosek?”, „dlaczego?”, „czy zawsze?”, „czy dla dowolnych?” itp. Uczeń powinien umieć prezentować swoje umiejętności nawet w sytuacji związanej z dużym stresem;
- kontrola pisemna, jako forma frontalna, wprowadza mniejsze zdenerwowanie, rozwija umiejętność wypowiadania się na piśmie. Dzielimy ją na prace domowe i klasowe (sprawdziany 45-minutowe i 15-minutowe kartkówki).

W procesie oceniania i klasyfikacji uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi należy brać pod uwagę gorszą formę ucznia w momencie pisania kartkówek i sprawdzianów oraz dawać mu szansę przystąpienia do nich w innym, odpowiednim momencie (Zaremba, 2014: 74).

Aby zaproponowany system oceniania stanowił integralną część niniejszego programu nauczania, proponuje się także alternatywne ocenianie. Ocenianie osiągnięć uczniów jest ściśle związane z celami lekcji, natomiast cele lekcji matematyki wspomaganą użyciem multimedialnych są interdyscyplinarne, bardziej złożone niż cele lekcji tradycyjnej. Muszą się wśród nich znaleźć zarówno cele dotyczące wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki (na pierwszym planie), jak również cele dotyczące rozwijania umiejętności efektywnego wykorzystania technologii w uczeniu się. Podczas lekcji wspomaganą komputerowo uczeń musi być aktywny. Przestaje być „odbiorcą wiedzy” (jak to się dzieje podczas wykładu), staje się „konstruktorem wiedzy”. Przez to w niniejszym programie nauczania zaznacza się tutaj bardzo wyraźny, zupełnie naturalny przykład wprowadzania do praktyki szkolnej zasad konstruktywizmu (Rybak, 2016: 241).

Wykorzystanie komputera w nauczaniu i uczeniu się matematyki wymaga od ucznia różnego rodzaju aktywności, które można podzielić na trzy grupy:

1. aktywności związane z obsługą komputera i programów (aktywności informatyczne),
2. aktywności związane z rozwiązywaniem zadań i problemów matematycznych (aktywności matematyczne),

3. aktywności związane z planowaniem i prowadzeniem pracy nad zagadnieniami matematycznymi z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania.

Uczeń, który uczestniczy w lekcji matematyki wspomaganą komputerowo, musi posiadać pewne umiejętności informatyczne, ale przyznać trzeba również, że nabywa podczas tej lekcji (oprócz wiadomości i umiejętności czysto matematycznych) również takie umiejętności, których nie nabyłby (lub których nabycie byłoby utrudnione), gdyby lekcja była prowadzona tradycyjnymi metodami. Do umiejętności takich należą:

- obsługa programów edukacyjnych,
- planowanie pracy nad konkretnym zadaniem z komputerem,
- prowadzenie rozumowań matematycznych zmierzające do utworzenia komputerowego modelu problemu,
- wybór i wykorzystanie odpowiednich narzędzi technologii w konkretnej sytuacji problemowej,
- wyszukiwanie informacji i wykorzystanie ich do rozwiązania problemu matematycznego,
- przeprowadzanie symulacji,
- stawianie hipotez dotyczących rozwiązania zadania w oparciu o wyniki symulacji,
- weryfikowanie postawionych hipotez z wykorzystaniem symulacji,
- argumentowanie,
- myślenie dywergencyjne w miejsce konwergencyjne,
- sporządzanie raportu z pracy nad zadaniem z wykorzystaniem programów użytkowych.

Część powyższych umiejętności powinna być nabyta na lekcjach informatyki, zaś na lekcji matematyki uczeń nabywa umiejętności właściwego ich wykorzystania w sytuacjach specyficznych dla kształcenia matematycznego (ibidem: 242). Dlatego też powinna tutaj wystąpić ścisła korelacja między przedmiotami, co byłoby dodatkowym, bardzo pozytywnym rezultatem multimedialnego wspomaganie nauczania matematyki.

Po pracy ucznia na komputerowo wspomaganą lekcji matematyki powinien pozostać ślad. Może to być plik zachowany w odpowiednim katalogu z nazwą np. klasa_data_zajęć, wydruk, notatka w zeszycie. Obowiązek sporządzenia dokumentu podczas takiej lekcji ma dwojakie znaczenie: edukacyjne (przeciwdziała zapomnieniu treści lekcji) i psychologiczno-dyscyplinujące, gdyż często uczniowie traktują lekcję z komputerem jako lekcję „ulgową”. Lekcja wzorowana na programie nauczania do matematyki w szkole branżowej II stopnia „Multimedialnie na matematyce II” jest lekcją, podczas której uczniowie sami konstruują swoją wiedzę i w każdym momencie lekcji są aktywni. Plik taki może też służyć jako narzędzie ewaluacyjne. Uczniowie powinni być wdrażani do odpowiedzialności za efekty swojego uczenia się. Będzie to łatwiejsze, gdy ich postępy w zakresie stosowania technologii będą udokumentowane i poddawane okresowej analizie.

W zaistniałej sytuacji wydaje się oczywiste, że ocenianie wyłącznie poziomu wiedzy matematycznej i umiejętności jej zastosowania do rozwiązywania problemów matematycznych (które najczęściej są schematycznymi zadaniami) bądź też zalecanych obecnie tzw. problemów praktycznych pozostawia poza swoim zasięgiem cały szereg umiejętności, które są kształcone na lekcji matematyki wspomaganą wykorzystaniem technologii. Obecnie proces edukacyjny ujmuje ucznia nie jako biernego odbiorcę wiedzy, lecz jako aktywnego uczestnika tego procesu, działającego na rzecz konstruowania wiedzy, więc wydaje się zrozumiałe, że ocenianiu powinno podlegać działanie ucznia i efekty tego działania (ibidem: 246).

Ocenianie działania ma miejsce, gdy bezpośrednio badamy działanie ucznia w zakresie wykonywania zadań wartościowych intelektualnie. Ocenianie działania wymaga od ucznia, aby był efektywnym wykonawcą w zakresie stosowania nabytej wiedzy. Ocenianie działania pozwala uczniowi ujawnić jego wiadomości i umiejętności w pełnej gamie zadań, które odzwierciedlają wyzwania, jakie można znaleźć w najbardziej wartościowych formach uczniowskich zajęć: prowadzeniu badań, przygotowywaniu, udoskonalaniu i dyskutowaniu opracowań wyników badań, współpracy z innymi, prowadzeniu debat itp. Tradycyjne metody i narzędzia oceniania (prace pisemne, wypowiedzi ustne) pełnią w dalszym ciągu swoją funkcję, dostarczając informacji o osiągnięciach w zakresie wiedzy i umiejętności ściśle matematycznych. Wszelkie nowe elementy w procesie oceniania wymagają opracowania kryteriów oceny, umiejscowienia jej wśród innych ocen cząstkowych oraz określenia jej wagi podczas ustalania oceny końcowej.

Jednym z nowych elementów, które powinny być oceniane w komputerowo wspomaganym nauczaniu matematyki, jest umiejętność wykorzystania technologii w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Konstruując kryteria oceny tej umiejętności, można przyjąć następujące poziomy jej osiągnięcia (ibidem: 248):

1. Uczeń nie wykazuje elementarnej wiedzy i umiejętności w zakresie wykorzystania technologii w uczeniu się matematyki lub wykazuje je w stopniu nieznacznym.
2. Uczeń wykazuje elementarną wiedzę i umiejętności, lecz często potrzebuje znacznej pomocy indywidualnej nauczyciela lub innego ucznia.
3. Uczeń wykazuje oczekiwaną wiedzę i umiejętności na minimalnie wystarczającym poziomie.
4. Uczeń wykazuje wiedzę i praktyczne umiejętności na oczekiwanym poziomie.
5. Uczeń wykazuje wyższy od oczekiwanego poziom wiedzy i umiejętności.
6. Uczeń wykazuje znakomity, twórczy, innowacyjny poziom wiedzy i umiejętności.

Uszczegółowienie powyższych poziomów osiągnięcia umiejętności wykorzystania technologii w rozwiązywaniu problemów matematycznych poprzez podanie kryteriów określania poziomu wiedzy i umiejętności ucznia zawarte jest w pozycji Anny Rybak „Multimedialne wspomaganie kształcenia matematycznego”. Istnieje tutaj bardzo silna korelacja z ocenianiem na informatyce, a także na przedmiotach branżowych

związanych z przedmiotami ścisłymi. W każdym z powyższych poziomów warto dodać stosunek ucznia do zasad etyki korzystania z nowoczesnych technologii, tzn. respektowanie praw autorskich, przedstawienie źródeł, odnośników itp.

Ocenianie osiągnięć uczniów zakładane w programie jest także szczegółowo omówione w pozycji Agnieszki Pfeiffer „Strategie oceniania różnych rodzajów aktywności dzieci starszych i młodzieży w edukacji matematycznej, wspierające kreatywność i samodzielność uczących się”.

6. EWALUACJA PROGRAMU

Głównym celem ewaluacji jest zdobycie informacji, która może być wykorzystana do podejmowania decyzji edukacyjnych. Ewaluację w niniejszym programie nauczania będzie się postrzegać jako strategiczne wsparcie rozwoju ucznia ze względu na kompetencje matematyczne, kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, a także kompetencje cyfrowe. Takim wsparciem wydaje się być idea portfolio. Portfolio uczniowskie może zawierać wszelkie prace, które uczeń wykonuje na polecenie nauczyciela lub z własnej inicjatywy. Mogą to być raporty z projektów badawczych, ale też notatki do zadania rozwiązywanego na lekcji (np. plik z nazwą klasa_data_zajęć), wydruki wyników symulacji komputerowych przeprowadzonych podczas rozwiązywania problemu czy zestaw adresów stron internetowych, z których uczeń korzystał, zbierając informacje potrzebne do opracowania tematu. Portfolio oferuje uczniowi wyjątkową okazję do:

- podejmowania decyzji i kontrolowania procesu własnego uczenia się,
- badania indywidualnej pracy i rozwoju,
- refleksji nad własnymi mocnymi i słabymi stronami,
- nabywania umiejętności rzetelnej samooceny,
- przyjmowania większej odpowiedzialności za własne uczenie się.

Taka metoda ewaluacji ma jeszcze inne pozytywne skutki:

- dokumentuje osiągnięcia ucznia,
- dokumentuje przebieg procesu uczenia się i rozwój ucznia w tym procesie,
- wymaga od ucznia wykorzystywania różnych źródeł pozyskiwania informacji i przetwarzania tych informacji (ze względu na różnorodność prac, które zawiera),
- stanowi unikalne źródło dokumentacji efektywności procesu nauczania,
- pozwala ocenić stopień osiągnięcia różnorodnych celów edukacyjnych,
- może zawierać prace w formie innej niż pisemna,
- stymuluje bardziej efektywne kontakty uczeń-nauczyciel.

Oprócz idei portfolio program będzie zakładał standardowe mierniki ewaluacji. Kiedy w centrum zainteresowania będą wyniki, osiągnięcia uczniów – wtedy wykorzystywane będą ilościowe metody i odpowiadające im narzędzia, np. testy. W przypadku ewaluacji koncentrującej się na ocenie relacji między uczniami w klasie, na procesie dydaktycznym, w którym istotną rolę odgrywają zastosowane metody pracy, wykorzystywane będą metody jakościowe posługujące się opisami (sytuacji, zachowań), raportami, obserwacjami, opiniami, wywiadami, ankietami, kwestionariuszami (Galant, 2012: 64–91).

Ewaluacja programu ma na celu uzyskanie informacji zwrotnej na temat efektywności zastosowanego programu w nauczaniu, warunków przebiegu pracy i wyników kształcenia. Określa ona skuteczność metod i stopień realizacji celów programu, przedstawia osiągnięcia ucznia. Zebrane dane pozwalają na określenie zalet, jak i mankamentów programu, co w rezultacie wpływa na wprowadzanie zmian w celu usprawnienia procesu nauczania. Ewaluacja programu nauczania może być przeprowadzana podczas realizacji programu poprzez między innymi: obserwację zachowań uczniów i ich pracy na lekcji, obserwację sposobu pracy nauczyciela oraz rozmowy z uczniami. Natomiast po zrealizowaniu określonego etapu programu, np. po upływie semestru, ewaluację można przeprowadzić także poprzez zbieranie informacji ustnej (sukcesy-porażki), pomiar przyrostu osiągnięć uczniów, przygotowanie prezentacji dorobku uczniów (np. z portfolio) oraz przeprowadzenie i analizę wyników ankiety ewaluacyjnej – przykładowe pytania do uczniów poniżej:

1. Co sprawia Ci w nauce matematyki najwięcej problemów?
2. Czy sposób prowadzenia zajęć Ci odpowiada?
3. Czy tematyka zajęć jest interesująca?
4. Czy odniosłeś korzyści z uczestniczenia w zajęciach? Jeśli tak, jakie?
5. Które ze stosowanych przez nauczyciela metod pracy pozwoliły Ci aktywnie uczestniczyć w zajęciach?
6. Czy atmosfera w klasie sprzyja zdobywaniu wiedzy?
7. Czy proponowana przez nauczyciela forma zajęć rozwija umiejętności samokształcenia?
8. Jak oceniasz rodzaj i stopień trudności prac domowych?
9. Jak oceniasz pracę nauczyciela?
10. Czy formy sprawdzania wiadomości i umiejętności Ci odpowiadają?
11. Czy mogłeś podczas zajęć w pełni wykazać się swoją wiedzą?
12. Czy mogłeś obserwować rezultaty swojej pracy?
13. Czy nauczyłeś się samodzielnie zdobywać wiedzę ?
14. Czy ćwiczenia robione na zajęciach rozwijają umiejętności praktyczne?
15. Co chciałbyś zmienić w prowadzeniu zajęć?

7. PODSUMOWANIE

W praktyce szkolnej edukacja matematyczna przygotowuje młodych ludzi do wykorzystywania myślenia matematycznego w skutecznym rozwiązywaniu problemów wynikających z codziennych sytuacji. Zmierza do stworzenia podstaw do korzystania z logiki, kształtowania myślenia przestrzennego czy nabycia umiejętności prezentacji matematycznej (wzory, modele, wykresy, tabele). Wymaga to wykształcenia zdolności i właściwej motywacji do korzystania z szerokiego wachlarza operacji i narzędzi matematycznych. Zgodnie z zaleceniami Parlamentu Europejskiego w dziedzinie matematyki zajęcia lekcyjne i pozalekcyjne powinny wyposażyć każdego ucznia w wiedzę, która obejmuje: umiejętność sprawnego liczenia, znajomość sposobów wykonywania pomiarów, znajomość sposobów dokonywania prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych oraz znajomość pytań, na które tylko matematyka może dać odpowiedź.

Funkcjonalność programu

Stworzony program nauczania matematyki w szkole branżowej II stopnia zakłada kształcenie i szkolenie wszystkich młodych ludzi w celu rozwijania kompetencji kluczowych na poziomie dającym im odpowiednie przygotowanie do dorosłego życia, umożliwianie osobom dorosłym rozwijania i aktualizowania kompetencji kluczowych przez całe życie.

Program nauczania „Multimedialnie na matematyce II” jest w pełni zgodny z podstawą programową oraz uwzględnia możliwość indywidualizacji pracy z uczniem. Program jest spójny pod względem merytorycznym i dydaktycznym, a przedstawiony sposób realizacji treści zapewnia realizację celów ogólnych i szczegółowych zawartych w podstawie programowej.

Przydatność programu

Program nauczania „Multimedialnie na matematyce II” stanowi opis sposobu realizacji celów kształcenia i zadań edukacyjnych ustalonych w podstawie programowej. Treści programu oraz zaproponowany sposób realizacji dostosowane są do potrzeb ucznia. Podstawowe cele kształcenia w szkołach kładą nacisk na umiejętność rozwiązywania problemów i przygotowanie uczniów do odpowiedzialnego funkcjonowania we współczesnym świecie, co powinno być najważniejszym zadaniem nauczyciela, zatem program może być zaadaptowany do każdej placówki oraz jest pozbawiony barier

(finansowych, organizacyjnych, technologicznych) uniemożliwiających adaptację programu w danej placówce.

Przydatność programu będzie się ujawniać także w rozumowaniu w sposób matematyczny w codziennym życiu. Dzisiaj często wykonujemy pewne algorytmy, nie zdając sobie z tego sprawy, np.:

- przepisy kucharskie – typowy przepis zawiera deklaracje obiektów (składników), ich początkowe wartości (miary) oraz opis działań doprowadzający do przyrządzenia potrawy;
- instrukcje montażu – często do zestawów mebli czy klocków lego dołączona jest kartka z instrukcją montażu zapisaną za pomocą sekwencji rycin obrazujących kolejne fazy powstawania składanego obiektu. Użytkownik, porównując zmiany na poszczególnych obrazkach, ma się domyślić, jakie czynności, w jakiej kolejności i za pomocą jakich części ma wykonywać. Zauważmy, że i tu występuje charakterystyczny dla algorytmów opis danych: najczęściej zestaw części składowych jest wyrysowany obok historyjki obrazkowej z zaznaczeniem liczby poszczególnych elementów;
- opis układów choreograficznych, scenopisy przedstawień. Tutaj też stosuje się specyficzną symbolikę i skróty notacyjne (Iwaszczuk, 2009: 53);
- programowanie np. w Python (np. program obliczający silnię danej liczby; popularne wśród młodzieży Facebook czy Instagram napisane są w języku Python).

Na koniec warto wprowadzić do programu nauczania kontekst: oczywiste jest, że aplikacje pomagające w rozwiązywaniu zadań matematycznych (i nie tylko) istnieją od lat, a uczniowie z nich korzystają. Istotne jest jednak nie samo rozwiązanie, lecz to, czy ktoś je zrozumiał i czy potrafi je samodzielnie zastosować w analogicznym zadaniu zgodnie z ideą konstruktywizmu. Wykorzystanie aplikacji, która podaje gotowe rozwiązania, ma ułatwić uczniom zrozumienie działań matematycznych, a nie automatycznie rozwiązywać za nich prace domowe.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Bednarek Józef, *Multimedia w kształceniu*, PWN, 2012.
- 2) Bryński M. i in., *Program nauczania „Matematyka dla przyszłości”*, JUKA, Warszawa 1999.
- 3) Galant Anna, *Ewaluacja programu nauczania*, [w:] Kosyra-Cieślak T. (red.), *Programy nauczania w rzeczywistości szkolnej. Tworzenie – wybór – ewaluacja*, ORE, Warszawa 2012.
- 4) Grębski Tomasz, *Wolfram Alpha. Praktyczny przewodnik po programie dla każdego. MATEMATYKA*. Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2018.
- 5) Guzicki Wojciech, *Poradnik nauczyciela matematyki*, ORE, Warszawa 2013.
- 6) Iwaszczuk Katarzyna, *Matematyka – autorski program kształtowania kompetencji kluczowych*, [w:] M. Sobczak, *Autorskie programy rozwijania kompetencji kluczowych w zakresie matematyki*, WSEI, Lublin 2009.
- 7) Kozuch Magdalena, Pietruszka Paulina, *Twórcza matematyka. Wspieranie uczniów zdolnych*, ORE, Warszawa 2011.
- 8) Krygowska Zofia, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. I., WSiP, Warszawa 1977.
- 9) Kwiecień Dariusz, *Efektywne metody nauczania matematyki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z wykorzystaniem TIK*, ORE, Warszawa 2016.
- 10) Okoń Wincenty, *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Wyd. „Żak”, Warszawa 1996.
- 11) Płońska Anna, *Jak pokonać trudności z funkcjami na lekcjach matematyki w szkole ponadpodstawowej*, Wyd. Nowik, Opole 2018.
- 12) Płońska Anna, *Jak pokonać trudności z matematyką w szkole ponadgimnazjalnej*. Wyd. Nowik, Opole 2016.
- 13) Pobiega Edyta, Skiba Robert, Winkowska-Nowak Katarzyna, *Matematyka z GeoGebra*, Wydawnictwo Akademickie SEDNO, Warszawa 2014.
- 14) Rybak Anna, *Multimedialne wspomaganie kształcenia matematycznego*, Wyd. NOWIK, Opole 2016.
- 15) Siwek Helena, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.
- 16) Wadsworth Barry J., *Teoria Piageta. Poznawczy i emocjonalny rozwój dziecka*, WSiP, Warszawa 1998.
- 17) Winkowska-Nowak Katarzyna, Honhenwarter Markus, Zdrodowska Aldona, *GeoGebra jako innowacyjne oprogramowanie wspomagające naukę matematyki*, [w:] Winkowska-Nowak K., Skiba R. (red.) *GeoGebra: Wprowadzenie innowacji edukacyjnej*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2011.
- 18) Wójtowicz Tomasz, *Aktywnie na matematyce. Program nauczania matematyki dla IV etapu edukacyjnego*, ORE, Warszawa 2014.
- 19) Zaremba Lilianna, *Specjalne potrzeby rozwojowe i edukacyjne dzieci i młodzieży*, ORE, Warszawa 2014.

Akty prawne

- 1) Uchwała Nr 61 Rady Ministrów z 26 marca 2013 r. w sprawie przyjęcia „Strategii Rozwoju Kapitału Społecznego 2020”.
- 2) Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 28 marca 2017 r. w sprawie ramowych planów nauczania dla publicznych szkół (Dz.U. z 31 marca 2017 r., poz. 703).
- 3) Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2 marca 2018 r., poz. 467).
- 4) Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 9 sierpnia 2017 r. w sprawie zasad organizacji i udzielania pomocy psychologiczno-pedagogicznej w publicznych przedszkolach, szkołach i placówkach (Dz.U. z 25 sierpnia 2017 r., poz. 1591).
- 5) Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 9 sierpnia 2017 r. w sprawie warunków organizowania kształcenia, wychowania i opieki dla dzieci i młodzieży niepełnosprawnych, niedostosowanych społecznie i zagrożonych niedostosowaniem społecznym (Dz.U. z 24 sierpnia 2017 r., poz. 1578).
- 6) Zalecenie Rady Unii Europejskiej z 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej 2018/C 189/01).
- 7) Obwieszczenie Marszałka Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej z 25 października 2018 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz.U. z 16 listopada 2018 r., poz. 2153).

Netografia

- 1) Borgensztajn J. i in., *Wytyczne wraz z aneksem do tworzenia programów nauczania*, ORE.edu, 2018, <https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2018/08/wytyczne_wraz_z_aneksem_do_tworzenia_programow_nauczania-1.pdf> [dostęp 2 kwietnia 2019].
- 2) Matuszczak A., *Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, 2015*, <<https://sites.google.com/site/programgimnazjum/nakladka-na-program-dla-uczniow>> [dostęp 4 kwietnia 2019].
- 3) Pfeiffer A., *Konstruktywizm i metody aktywizujące w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży*, ORE.edu, 2017, <<https://www.ore.edu.pl/2018/02/materialy-dla-nauczycieli-szkol-cwiczen-matematyka/>> [dostęp 4 kwietnia 2019].
- 4) Pfeiffer A., *Strategie oceniania różnych rodzajów aktywności dzieci starszych i młodzieży w edukacji matematycznej, wspierające kreatywność i samodzielność uczących się*, ORE.edu, 2017, <<https://www.ore.edu.pl/2018/02/materialy-dla-nauczycieli-szkol-cwiczen-matematyka/>> [dostęp 4 kwietnia 2019].
- 5) Wróbel K., Stasiak M., *Model funkcjonowania pracowni przedmiotowej z matematyki w szkole ponadpodstawowej*, ORE.edu, 2017, <<https://www.ore.edu.pl/2018/02/materialy-dla-nauczycieli-szkol-cwiczen-matematyka/>> [dostęp 4 kwietnia 2019].

- 6) <http://www.epodreczniki.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 7) <https://pl.khanacademy.org/> [dostęp 25 marca 2019].
- 8) <https://learningapps.org/about.php> [dostęp 25 marca 2019].
- 9) <http://matematyka.pisz.pl/index.html> [dostęp 25 marca 2019].
- 10) <https://www.matemaks.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 11) <https://www.medianauka.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 12) <http://www.megamatma.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 13) <http://www.scholaris.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 14) <https://sites.google.com/site/ggiwarszawa/Home> [dostęp 25 marca 2019].
- 15) <http://www.tomaszgrebski.pl/> [dostęp 25 marca 2019].
- 16) <http://www.wolframalpha.com/> [dostęp 25 marca 2019].

Agnieszka Szumera – asystent w Instytucie Matematyki i Informatyki Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Chełmie z 16-letnim stażem pracy. Wieloletnia nauczycielka matematyki oraz trenerka warsztatów z matematyki dla uczniów w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”; doradca metodyczny dla nauczycieli w zakresie pracy z uczniem słabym/zdolnym na lekcjach matematyki; wykładowca zajęć na studiach podyplomowych „Nauczanie matematyki” w PWSZ w Chełmie; egzaminator konkursów matematycznych „Zostań Euklidesem”, „Zostań Pitagorasem”; opracowywanie zestawów zadań na cykliczny konkurs matematyczny im. Samuela Chróścikowskiego (współautor publikacji *Konkurs matematyczny im. Samuela Chróścikowskiego*, PWSZ, Chełm 2019); specjalista w zakresie tworzenia programu nauczania (współautor programu nauczania „Zrównoważona Szkoła”, PWSZ, Chełm 2014 oraz poradnika metodycznego *Zrównoważona Szkoła dla Zrównoważonego Świata*, PWSZ, Chełm 2014 w ramach projektu MINDSTEPS).