Symetralna odcinka

1. Cele lekcji

a) Wiadomości

1. Przypomnienie własności symetralnej odcinka.

b) Umiejętności

1. Uczeń potrafi skonstruować symetralną odcinka.
2. Uczeń potrafi rozwiązywać zadania dotyczące symetralnej odcinka.
3. Kształtowanie umiejętności rozróżniania definicji od twierdzeń.
4. Ćwiczenie umiejętności pracy z tekstem matematycznym.
5. Ćwiczenie umiejętności pracy w grupie.

2. Metoda i forma pracy

Praca w grupach

3. Środki dydaktyczne

1. Komputer z rzutnikiem multimedialnym.
2. Podręcznik i zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego.

4. Przebieg lekcji

Uczniowie otrzymują zadanie: *Przypomnijcie sobie, co to była symetralna odcinka, jak byście ją zdefiniowali?*

Uczniowie formułują swoje określenia (mogą korzystać z podręcznika). Po chwili następuje zebranie pomysłów uczniowskich. Pojawiają się następujące określenia symetralnej:

1. *Symetralna odcinka to prosta przechodząca przez środek odcinka, prostopadła do niego.*
2. *Symetralna odcinka to jego oś symetrii, nie zawierająca odcinka.*

Uczący podaje jeszcze jedno określenie:

3. *Symetralna odcinka to zbiór punktów równo oddalonych od końców odcinka.*

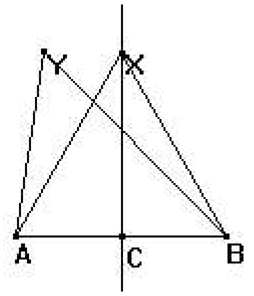
Nauczyciel formułuje dodatkowo pytanie: *Czy te trzy określenia charakteryzują ten sam obiekt matematyczny?*

Uczniowie przez chwilę próbują w parach lub w czwórkach (dwie sąsiednie ławki) opracować powyższe określenia. Najwięcej problemów sprawia określenie trzecie. Dwa pierwsze określenia uczniowie uznają za dobre definicje symetralnej odcinka. Uczący zadaje pytanie: *co to znaczy, że dwa pierwsze określenia są dobrymi definicjami?* (jedno określenie wynika z tekstu podręcznikowego, a więc uczniowie od razu je zaakceptowali). Po krótkiej wymianie poglądów pada konkluzja, że obie definicje są równoważne, a więc z definicji pierwszej wynika druga (traktowana jako twierdzenie) i na odwrót: z drugiej definicji wynika pierwsza (jako twierdzenie).

Nauczyciel proponuje, aby uczniowie, zastanawiając się nad określeniem trzecim, spróbowali najpierw odpowiedzieć na pytanie: *Co trzeba pokazać, aby stwierdzić poprawność lub niepoprawność określenia trzeciego.*

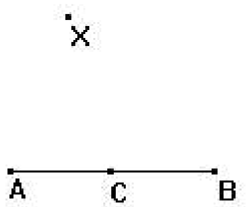
W wyniku rozmowy z uczniami dochodzi się do konkluzji, że trzeba by się zastanowić, czy np. z definicji pierwszej wynika określenie trzecie oraz czy z określenia trzeciego wynika definicja pierwsza (można to odnieść do definicji drugiej).

Nauczyciel proponuje zastanowienie się właśnie nad tymi implikacjami. Proponuje następujące rozumowanie (przejście z definicji 1 do 3):



Z założenia wiadomo: $AC = BC$ i *kąt* ACX jest kątem prostym. Niech punkt X będzie dowolnym punktem symetralnej (w myśl definicji 1) oraz punkt Y - nie należącym do symetralnej. Należy pokazać, że $AX = XB$ oraz $YA \neq YB$. Łatwo pokazać, że trójkąty ACX i BCX są przystające – cecha: bkb – zatem trzecie boki musza być tej samej długości: $AX = XB$. Postawmy hipotezę, że $AY = YB$. Wtedy trójkąty AYX i YCB są przystające – cecha: bbb – zatem kąty ACY i BCY są równe, a wiec po 90°, czyli punkt Y musiałby leżeć na symetralnej – co jest sprzecznością (Y nie należał do symetralnej). To oznacza, że żaden punkt poza symetralną nie jest równoodległy od końców A i B.

Następnie uczniowie próbują znaleźć drogę z określenia trzeciego do definicji pierwszej. Rozumowanie jest następujące:



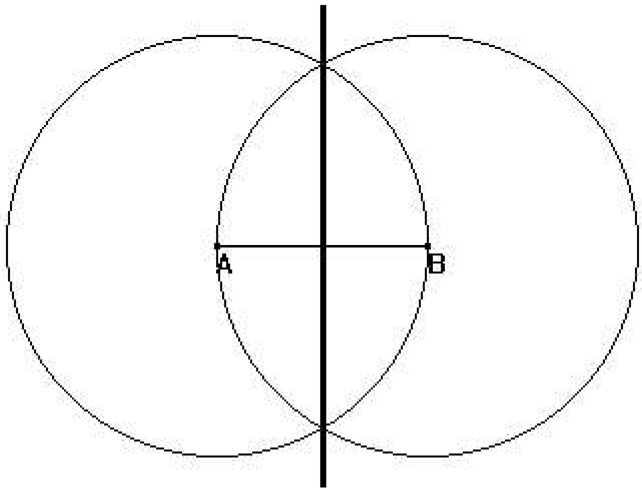
Niech punkt X będzie punktem równo oddalonym od końców odcinka, zatem $AX = XB$. Ponadto punkt C to punkt przecięcia krzywej będącej zbiorem punktów równo oddalonych od końców odcinka i odcinka. Skoro punkt C jest równoodległy od punktów A i B, to musi wyznaczać środek odcinka AB. Trójkąty ACX i BCX są przystające – cecha bbb. Zatem kąty ACX i BCX są równe, a wiec po 90°, a wiec punkt X należy do prostej prostopadłej do odcinka AB i przechodzącej przez jej środek.

Następnie uczniowie otrzymują do realizacji następujące zagadnienia:

- Konstrukcja symetralnej odcinka.
- Równoważność definicji pierwszej i drugiej.

Uczniowie pracują parami (osoby w ławce), potem czwórkami (dwie sąsiednie ławki). Po krótkiej pracy następuje zebranie wyników:

- ✓ Konstrukcja: kreślimy dwa okręgi o tych samych promieniach (np. równych danemu odcinkowi) i środkach w końcach odcinka; okręgi przetną się w dwóch punktach, które należą do symetralnej (bo są równo odległe od obu końców odcinka) – konstrukcja również wykonywana przez nauczyciela na komputerze.



- ✓ Schemat rozumowania wyniki bezpośrednio z definicji osi symetrii odcinka oraz tego, że obrazem jednego końca odcinka musi być drugi koniec odcinka.

W końcowej części lekcji (w zależności od pozostałego do dyspozycji czasu) uczniowie rozwiązują kilka zadań, np.:

1. Jaki wzór ma symetralna odcinka o końcach *A(a, 0), B(b, 0)*?
2. Jaki wzór ma symetralna odcinka o końcach *A(0, a), B(0, b)*?
3. Jak dobrać końce odcinka, aby symetralna była prostą $y = x$?

5. Bibliografia

1. Konior J., *Repetytorium z CABRI, część II,* [w:] „Matematyka i Komputery" nr 11, 2002, s. 5-8.
2. Pająk W., *Badanie przekształceń geometrycznych,* [w:] „Nauczyciele i Matematyka" nr 8, 1993, s. 22-23.
3. Pająk W., *CABRI i przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie,* VULCAN, Wrocław 1994.
4. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony,* RES POLONA, Łódź 2002.
5. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A, Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.

6. Załączniki

a) Zadanie domowe

Kilka zadań, np.:

1. Dobierz końce odcinka, aby jego symetralną była prosta o równaniu: $y = a$ $(x = a)$.
2. Narysuj dowolny trójkąt i wyznacz symetralne jego boków. Czy zauważasz jakąś ciekawą własność? Sprawdź ją jeszcze w kilku innych sytuacjach.

7. Czas trwania lekcji

1 godzina lekcyjna

8. Uwagi do scenariusza

brak