Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody drużynowe (22 maja 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Na tablicy napisano skończenie wiele różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb został napisany także ich iloczyn. Jaka jest największa możliwa liczba liczb napisanych na tablicy?

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że wśród napisanych liczb znajdują się co najmniej dwie, których wartość bezwzględna jest większa od 1. Niech a będzie liczbą o największej wartości bezwzględnej. Jeśli b jest inną liczbą o wartości bezwzględnej większej od 1, to $|a \cdot b| > |a|$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że co najwyżej jedna z liczb znajdujących się na tablicy może mieć wartość bezwzględną większą od 1. Podobnie dowodzimy, że co najwyżej jedna z napisanych liczb może mieć wartość bezwzględną z przedziału $(0,1)$. Rozważymy dwa przypadki.

(a) Na tablicy znajduje się liczba -1. Niech a będzie dowolną inną napisaną liczbą. Wówczas dla każdej dodatniej liczby całkowitej n na tablicy widnieją liczby a^n oraz $-a^n$. Stąd wynika, że $a=0$ lub $a=1$, czyli napisane zostały co najwyżej trzy liczby.

(b) Jeśli na tablicy nie ma liczby -1, to napisanych liczb może być co najwyżej cztery: jedna o wartości bezwzględnej z przedziału $(0,1)$, jedna o wartości bezwzględnej większej niż 1 oraz 0 i 1.

Pozostaje zauważyć, że czwórka liczb 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2 spełnia warunki zadania.

---

2. Na okręgu k dane są takie punkty A, B, że odcinek AB nie jest średnicą tego okręgu. Po dłuższym łuku AB okręgu k porusza się punkt C w taki sposób, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Punkty D i E są spodkami wysokości trójkąta ABC poprowadzonych odpowiednio z punktów A i B. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC, a punkt G jest rzutem prostokątnym punktu E na prostą BC.

(a) Udowodnij, że proste AB i FG są równoległe.

(b) Wyznacz zbiór środków S odcinka FG, odpowiadających możliwym położeniom punktu C.

Szkic rozwiązania

(a) Punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu (o średnicy AB). Stąd $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DEF$. Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle DEF = \sphericalangle FGC$. Wobec tego $\sphericalangle ABD = \sphericalangle FGC$, czyli proste AB i FG są równoległe.

(b) Oznaczmy przez M środek odcinka AB. Punkty M, S i C leżą na jednej prostej. Wielkość kąta ACB nie zależy od położenia punktu C. Oznaczmy ją przez γ. Wówczas

$$\frac{CS}{CM} = \frac{CF}{CA} = \frac{CF}{CD} \cdot \frac{CD}{CA} = \cos^2\gamma, \quad \text{a zatem} \quad \frac{SM}{CM} = 1 - \cos^2\gamma\,.$$

Stąd wniosek, że punkt S jest obrazem punktu C w jednokładności o środku w punkcie M i skali $1-\cos^2\gamma$.

Oznaczmy przez C_1, C_2 takie punkty na okręgu k, że proste AC_1 i BC_2 są prostopadłe do prostej AB. Szukany zbiór punktów jest obrazem krótszego łuku C_1C_2 okręgu k (bez punktów C_1 i C_2) w opisanej wyżej jednokładności.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Udowodnij, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2+1)-n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Rozważmy reszty z dzielenia liczby n przez 3. Jeśli $n \equiv 0 \pmod 3$ lub $n \equiv 2 \pmod 3$, to $2(n^2+1)-n \equiv 2 \pmod 3$, więc liczba $2(n^2+1)-n$ nie może być kwadratem liczby całkowitej. Wobec tego liczba n musi dawać resztę 1 z dzielenia przez 3. Mamy wówczas trzy możliwości

$$n \equiv 1 \pmod 9, \quad n \equiv 4 \pmod 9 \quad \text{lub} \quad n \equiv 7 \pmod 9.$$

W każdym z powyższych przypadków otrzymujemy $2(n^2+1)-n \equiv 3 \pmod 9$, a zatem liczba $2(n^2+1)-n$ jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9, czyli nie może być kwadratem liczby całkowitej.

4. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = 60°$. Punkt P leży wewnątrz rombu, przy czym spełnione są równości $BP=1$, $DP=2$, $CP=3$. Wyznacz długość odcinka AP.

Szkic rozwiązania

Trójkąt ABD obróćmy wokół punktu B o $60°$, w taki sposób, aby punkt A przeszedł na punkt D. Obraz punktu P przy tym obrocie oznaczmy przez Q. Zauważmy, że $BP=BQ$ oraz $\sphericalangle PBQ = 60°$. Wobec tego trójkąt PBQ jest równoboczny, skąd wniosek, że $PQ=1$. Ponadto $CQ=DP=2$ oraz $CP=3$. Stąd na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy, że punkt Q leży na odcinku CP, a zatem $\sphericalangle BQC = 120°$.

Rozważmy trójkąt PQD. Ponieważ $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BQC = 120°$ oraz $\sphericalangle BPQ = 60°$, to $\sphericalangle DPQ = 60°$. Ponadto $DP=2$ i $PQ=1$. Wobec tego trójkąt ten jest prostokątny, skąd wniosek, że $AP=DQ=\sqrt{3}$.

5. Wyznacz wszystkie trójki (a,k,n) liczb całkowitych dodatnich, dla których spełniona jest równość

$$k+a^k = n+2a^n.$$

Szkic rozwiązania

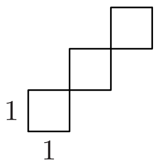
Przypuśćmy, że $a \geqslant 2$. Rozważymy dwa przypadki.

(a) Jeśli $k \leqslant n$, to $a^k < 2a^n$, więc $k+a^k < n+2a^n$.

(b) Jeśli $k \geqslant n+1$, to $a^k \geqslant a \cdot a^n \geqslant 2a^n$, a zatem $k+a^k > n+2a^n$.

Wobec tego $a=1$. Stąd wynika, że trójki (a,k,n), spełniające warunki zadania, są postaci $(1,n+1,n)$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

6. Na szachownicy 8×8 układamy klocki o kształcie przedstawionym na rysunku (można je obracać o $90°$). Klocki nie mogą na siebie nachodzić ani wystawać poza krawędź szachownicy. Wyznacz największą możliwą liczbę pól szachownicy, które możemy w ten sposób pokryć.



Szkic rozwiązania

Pokolorujmy na czerwono trzeci i szósty wiersz szachownicy. Zauważmy, że każdy klocek przykrywa dokładnie jedno czerwone pole. A zatem na szachownicy zmieści się co najwyżej 16 klocków. Bezpośrednio sprawdzamy, że ułożenie takiej liczby klocków jest możliwe. Możemy więc pokryć maksymalnie $3 \cdot 16 = 48$ pól.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego