VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa, **test próbny**

(wrzesień 2011 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Liczba krawędzi pewnego ostrosłupa jest o 15 większa od liczby jego wszystkich wierzchołków. Wynika z tego, że ten ostrosłup ma dokładnie

N a) 15 ścian bocznych;

T b) 16 ścian bocznych;

N c) 17 ścian bocznych.

Komentarz

Przyjmimy, że podstawą rozważanego ostrosłupa jest pewien n-kąt. Wtedy liczba wierzchołków tego ostrosłupa jest równa $n+1$, a liczba jego krawędzi jest równa $2n$.

Zgodnie z warunkami podanymi w treści zadania otrzymujemy $2n=(n+1)+15$, skąd wyznaczamy $n=16$. Wobec tego podstawą tego ostrosłupa jest 16-kąt, a więc ostrosłup ten ma 16 ścian bocznych.

2. Istnieją takie różne liczby pierwsze p, q, że liczba

T a) $pq+1$ jest liczbą pierwszą;

T b) $pq+1$ jest liczbą złożoną;

T c) $p+q$ jest liczbą pierwszą.

Komentarz

a) Dla $p=2$ i $q=3$ liczba $pq+1=7$ jest pierwsza.

b) Dla $p=3$ i $q=5$, liczba $pq+1=16$ jest złożona.

c) Dla $p=2$ i $q=3$ liczba $p+q=5$ jest pierwsza.

Uwaga

Powyższe liczby p i q nie są jedynymi przykładami potwierdzającymi słuszność stwierdzeń a), b) i c). Zauważmy jednak, że aby znaleźć prawidłowe przykłady świadczące o prawdziwości zdań a) i c), jedna z liczb p lub q musi być równa 2. W przeciwnym przypadku, liczby p i q — jako liczby pierwsze różne od 2 — byłyby nieparzyste. Wtedy liczby $pq+1$ oraz $p+q$ byłyby parzyste, a więc nie mogłyby być liczbami pierwszymi.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $a>b$ oraz $c>d$. Wynika z tego, że

T a) $a+c > b+d$;

N b) $a-c > b-d$;

N c) $ac > bd$.

Komentarz

a) Ponieważ $a>b$, więc $a+c>b+c$.

Z kolei $c>d$, więc $b+c>b+d$, skąd wniosek, że $a+c>b+d$.

b) Przyjmijmy $a=3$, $b=2$ oraz $c=3$, $d=1$.

Wówczas $a>b$ oraz $c>d$, jednak $a-c=0$ oraz $b-d=1$, a więc $a-c<b-d$.

c) Niech $a=3$, $b=1$ oraz $c=-1$, $d=-2$.

Wówczas $a>b$ oraz $c>d$, jednak $ac=-3$ oraz $bd=-2$, a więc $ac<bd$.

Uwaga

Z części b) i c) wynika, że danych dwóch nierówności nie można ani odejmować ani mnożyć stronami. Rozumując podobnie jak w części a) można jednak uzasadnić, że nierówności $a>b$ oraz $c>d$ można pomnożyć stronami, jeśli założymy dodatkowo, że obie liczby b i c są dodatnie.

4. Dodatnią liczbę całkowitą n zwiększono o 50%, a następnie wynik zmniejszono o 50%. W rezultacie otrzymano liczbę całkowitą m. Wynika z tego, że

N a) $m=n$;

T b) liczba n jest podzielna przez 4;

T c) liczba m jest podzielna przez 3.

Komentarz

b) Zwiększając liczbę n o 50%, uzyskujemy liczbę $n+\frac{50}{100}n=\frac{3}{2}n$. Z kolei zmniejszając liczbę $\frac{3}{2}n$ o 50%, otrzymujemy liczbę $\frac{3}{2}n-\frac{50}{100}\cdot\frac{3}{2}n=\frac{3}{4}n$. Wobec tego $m=\frac{3}{4}n$, czyli $4m=3n$. Zatem liczba $3n$ jest podzielna przez 4, a skoro liczby 3 i 4 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1), więc liczba n jest podzielna przez 4.

c) Z uzyskanej wyżej równości $4m=3n$ wynika, że liczba $4m$ jest podzielna przez 3. Ponieważ liczby 4 i 3 są względnie pierwsze, więc liczba m jest podzielna przez 3.

a) Różne liczby $m=3$ i $n=4$ spełniają warunki zadania.

5. Suma pewnych czterech różnych dodatnich liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Wynika z tego, że

T	a) co najmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta;
T	b) iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą;
N	c) co najmniej dwie z tych liczb są parzyste.

Komentarz

a) Niech a, b, c, d będą danymi liczbami i przypuśćmy, że wszystkie one są parzyste. Wówczas liczba $a+b+c+d$ jest parzysta. Przeczy to jednak warunkom zadania. Stąd wniosek, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, d musi być nieparzysta.

b) Jeśli wszystkie cztery dane liczby a, b, c, d są nieparzyste, to liczba $a+b+c+d$ jest parzysta. Przeczy to jednak warunkom zadania. Wobec tego co najmniej jedna z liczb a, b, c, d musi być parzysta. Zatem iloczyn $abcd$ jest liczbą parzystą.

c) Rozpatrzmy następujące cztery liczby: 1, 2, 3, 5. Ich suma jest równa 11 i jest to liczba nieparzysta. Jednak wśród rozpatrywanych czterech liczb jest tylko jedna parzysta: 2.

Uwaga

W powyższym rozumowaniu korzystaliśmy między innymi z tego, że suma czterech liczb parzystych jest liczbą parzystą. Oto uzasadnienie: Jeśli liczby a, b, c i d są parzyste, to $a=2k$, $b=2l$, $c=2m$ oraz $d=2n$, gdzie k, l, m i n są liczbami całkowitymi. Wtedy

$$a+b+c+d=2(k+l+m+n).$$

Liczba $k+l+m+n$ jako suma liczb całkowitych jest całkowita, skąd wynika, że liczba $a+b+c+d$ jest parzysta.

Analogicznie możemy uzasadnić, że suma czterech liczb nieparzystych a, b, c, d jest liczbą parzystą: Przyjmując bowiem $a=2k+1$, $b=2l+1$, $c=2m+1$ oraz $d=2n+1$, gdzie k, l, m i n są liczbami całkowitymi, uzyskujemy

$$a+b+c+d=2(k+l+m+n+2).$$

Liczba $k+l+m+n+2$ jako suma liczb całkowitych jest całkowita, a zatem liczba $a+b+c+d$ jest parzysta.

Podobnie rozumując stwierdzamy, że iloczyn czterech liczb całkowitych a, b, c, d, z których co najmniej jedna jest parzysta, jest liczbą parzystą. Dla dowodu przyjmijmy, że $a=2p$, gdzie p jest liczba całkowitą. Stąd $abcd=2(pbcd)$. Liczba $pbcd$ jako iloczyn liczb całkowitych jest liczbą całkowitą. Wobec tego liczba $abcd$ jest parzysta.

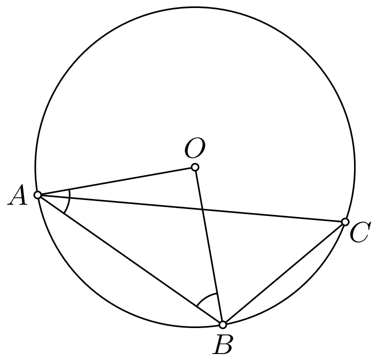
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O, przy czym $\sphericalangle OAB = 45°$. Punkt C leży na dłuższym łuku AB tego okręgu. Wynika z tego, że

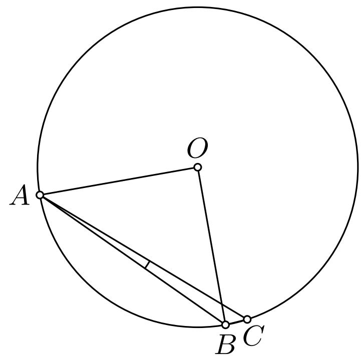
T	a) $\sphericalangle ABO = 45°$;
T	b) $\sphericalangle ACB = 45°$;
N	c) $\sphericalangle ABC < 130°$.

Komentarz

a) Odcinki OA i OB są promieniami danego okręgu, więc są równej długości. Wobec tego $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = 45°$.



rys. 1



rys. 2

b) Suma kątów w trójkącie ABO jest równa $180°$, a zatem $\sphericalangle AOB = 90°$. Kąt AOB jest kątem środkowym, a kąt ACB kątem wpisanym i oba są oparte na tym samym łuku o końcach A i B (rys. 1). Wobec tego $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = 45°$.

c) Wybierzmy punkt C, zgodnie z warunkami zadania oraz tak, aby $\sphericalangle BAC = 4°$ (rys. 2). Wówczas korzystając z części b), uzyskujemy

$$\sphericalangle ABC = 180° - (\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC) = 180° - (45° + 4°) = 131° > 130°.$$

7. Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której

N	a) $\lvert\lvert x-1\rvert+2\rvert = 0$;
N	b) $\lvert\lvert x-1\rvert+2\rvert = 1$;
T	c) $\lvert\lvert x-1\rvert+2\rvert = 2$.

Komentarz

a) Dla każdej liczby x spełniona jest nierówność $|x-1| \geqslant 0$, więc $|x-1|+2 \geqslant 2$. Stąd wniosek, że $||x-1|+2| = |x-1|+2$. Wobec tego dane równanie przybiera postać $|x-1| = -2$, co prowadzi do sprzeczności.

b) Analogicznie jak wyżej, dane równanie przybiera postać $|x-1| = -1$, co spełnione być nie może.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) Zauważmy, że $x=1$ spełnia dane równanie.

Uwaga

Rozumując analogicznie jak w częściach a) i b), można uzasadnić, że liczba $x=1$ jest jedyną liczbą spełniającą równanie z części c).

8. Wszystkie kąty sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ są równe. Wynika z tego, że

T a) proste AB i DE są równoległe;

N b) odcinki BC i EF są równej długości;

N c) sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny.

Komentarz

a) Wszystkie kąty sześciokąta $ABCDEF$ są równe, więc każdy z nich ma miarę $120°$.

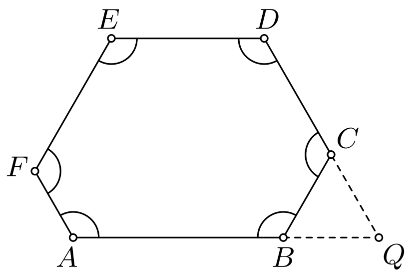
Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostych AB i CD (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle QBC = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QCB = 60^\circ .$$

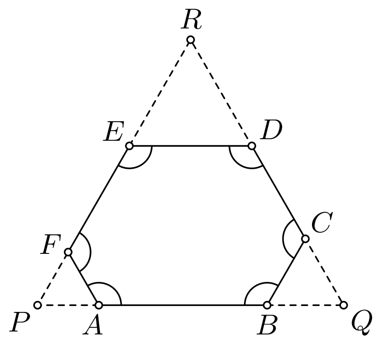
Wynika stąd, że $\sphericalangle BQC = 60^\circ$. Zatem

$$\sphericalangle BQC + \sphericalangle EDQ = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ ,$$

co oznacza, że proste AB i DE są równoległe.



rys. 3



rys. 4

b), c) Niech PQR będzie trójkątem równobocznym (rys. 4). Poprowadźmy prostą AF równoległą do boku QR oraz prostą BC równoległą do boku RP, jak pokazano na rysunku 4. Teraz poprowadźmy prostą ED równoległą do boku PQ, ale w taki sposób, aby długości odcinków BC i EF były różnej długości. Otrzymaliśmy w ten sposób sześciokąt wypukły $ABCDEF$.

Ponieważ trójkąty PAF, QBC i RED są równoboczne, więc każdy kąt wewnętrzny sześciokąta $ABCDEF$ ma miarę $120°$. W sześciokącie tym odcinki BC i EF są różnej długości. Stąd wniosek, że sześciokąt $ABCDEF$ nie jest foremny.

9. Liczby a, b, c są dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a-b=\dfrac{c}{3} \\ a+b=\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Wynika z tego, że

N	a) $b<c$ oraz $c<a$;
N	b) $a<b$ oraz $b<c$;
T	c) $b<a$ oraz $a<c$.

Komentarz

Liczba c jest dodatnia, więc z pierwszej równości wynika, że $a-b>0$, czyli $b<a$. Liczby b i c są dodatnie, a zatem na mocy drugiej równości uzyskujemy $a<a+b=\frac{c}{2}<c$. Stąd ostatecznie $b<a$ oraz $a<c$.

10. Dodatnie liczby całkowite m, n spełniają warunek $m>n$. Wynika z tego, że

T	a) $m \geqslant n+1$;
N	b) $\sqrt{m} \geqslant \sqrt{n}+1$;
T	c) $m^2 \geqslant n^2+3$.

Komentarz

a) Jeśli dwie liczby całkowite są różne, to różnica między większą z nich a mniejszą wynosi co najmniej 1. Wobec tego $m-n \geqslant 1$, czyli $m \geqslant n+1$.

b) Przyjmując $m=2$ oraz $n=1$, otrzymujemy $\sqrt{m}=\sqrt{2}<2=\sqrt{n}+1$.

c) Uzasadnimy, że dana nierówność jest spełniona dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m i n takich, że $m>n$. Podamy dwa sposoby tego uzasadnienia.

Sposób I

Obie strony nierówności $m \geqslant n+1$ są dodatnie, a zatem możemy obie strony tej nierówności podnieść do kwadratu. Uzyskujemy wtedy $m^2 \geqslant n^2+2n+1$.

Z kolei liczba n jest całkowita i dodatnia, a zatem $n \geqslant 1$.

Wobec tego $m^2 \geqslant n^2+2n+1 \geqslant n^2+3$.

Sposób II

Wiemy, że $n \geqslant 1$, więc z nierówności $m \geqslant n+1$ uzyskujemy $m \geqslant 2$. Wobec tego $m+n \geqslant 3$. Stąd $m^2-n^2=(m+n)(m-n) \geqslant 3 \cdot 1=3$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11. Liczby całkowite a, b, c są dodatnie. Każda z nich daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Wynika z tego, że

T a) liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3;

T b) suma cyfr liczby $a+b+c$ jest podzielna przez 3;

T c) liczby $a+b$ oraz c są różne.

Komentarz

a) Z warunków zadania wynika, że istnieją takie liczby całkowite k, l, m, że

$$a=3k+1, \quad b=3l+1, \quad c=3m+1.$$

Wobec tego $a+b+c=3(k+l+m+1)$. Liczba $k+l+m+1$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3.

b) Wykazaliśmy wyżej, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3. Zatem na mocy cechy podzielności przez 3, suma cyfr liczby $a+b+c$ jest także podzielna przez 3.

c) Zauważmy, że $a+b=3(k+l)+2$. Stąd wynika, że liczba $a+b$ z dzielenia przez 3 daje resztę 2, podczas gdy liczba c z dzielenia przez 3 daje resztę 1. Wobec tego liczby $a+b$ i c nie mogą być równe.

12. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, dla których

$$AB<A'B', \quad BC<B'C' \quad \text{oraz} \quad CA<C'A'.$$

Wynika z tego, że

T a) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od obwodu trójkąta $A'B'C'$;

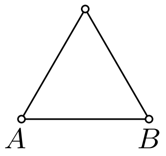
N b) pole trójkąta ABC jest mniejsze od pola trójkąta $A'B'C'$;

N c) istnieje trójkąt przystający do trójkąta ABC, który można umieścić wewnątrz trójkąta $A'B'C'$.

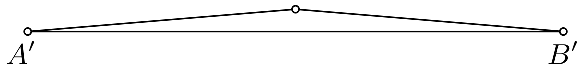
Komentarz

a) Dodając dane nierówności stronami, uzyskujemy

$$AB+BC+CA<A'B'+B'C'+C'A'.$$



rys. 5



rys. 6

b) Rozpatrzmy następujące trójkąty: Trójkąt ABC jest równoboczny i ma bok długości 1 (rys. 5). Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, a więc jest większe od $\frac{1}{4}$. Z kolei trójkąt

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$A'B'C'$ jest trójkątem równoramiennym o podstawie $A'B' = 4$ i wysokości poprowadzonej z wierzchołka C' równej $\frac{1}{16}$. Wówczas pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $\frac{1}{8}$. Ponadto spełnione są nierówności

$$AB < A'B', \quad BC < B'C' \quad \text{oraz} \quad CA < C'A',$$

lecz pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta $A'B'C'$.

c) Rozpatrzmy ponownie trójkąty ABC i $A'B'C'$ skonstruowane w części b). Ponieważ pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta $A'B'C'$, więc nie istnieje trójkąt przystający do trójkąta ABC, który można umieścić wewnątrz trójkąta $A'B'C'$.

13. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $ab+bc+cd+da$ jest podzielna przez 5. Wynika z tego, że podzielna przez 5 jest co najmniej jedna z liczb

N a) $a+b$, $c+d$;

T b) $a+c$, $b+d$;

N c) $a+d$, $b+c$.

Komentarz

b) Zauważmy, że $ab+bc+cd+da = (a+c)b+(a+c)d = (a+c)(b+d)$. Zatem iloczyn

$$(a+c)(b+d)$$

jest liczbą podzielną przez 5, a liczba 5 jest liczbą pierwszą. Wobec tego jeden z czynników $a+c$ lub $b+d$ musi być podzielny przez 5.

a) Przyjmijmy $a=2$, $b=1$, $c=3$ oraz $d=0$. Wówczas liczba $ab+bc+cd+da=5$ jest podzielna przez 5. Jednak wtedy żadna z liczb $a+b=3$ i $c+d=3$ nie jest podzielna przez 5.

c) Dla $a=2$, $b=1$, $c=3$ oraz $d=0$, żadna z liczb $a+d=2$ oraz $b+c=4$ nie jest podzielna przez 5.

14. Liczby a, b są dodatnie oraz liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ i $a-b$ są wymierne. Wynika z tego, że

T a) wymierna jest liczba $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

T b) wymierna jest każda z liczb $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$;

T c) wymierna jest liczba $a+b$.

Komentarz

a) Zauważmy, że dla dodatnich liczb a i b,

$$a-b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Wobec tego liczba

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych.

b) Oznaczmy $\sqrt{a}-\sqrt{b}=p$ oraz $\sqrt{a}+\sqrt{b}=q$. Dodając stronami ostatnie dwie równości, uzyskujemy $2\sqrt{a}=p+q$, czyli $\sqrt{a}=\frac{1}{2}(p+q)$. Wiemy, że liczby p i q są wymierne, a zatem suma $p+q$ jest również liczbą wymierną. Zatem wymierna jest także liczba $\frac{1}{2}(p+q)=\sqrt{a}$.

Ponieważ $\sqrt{b}=\sqrt{a}-p$ oraz liczby $\sqrt{a}$ i p są wymierne, więc wymierna jest także liczba $\sqrt{b}$.

c) Liczby $a=(\sqrt{a})^2$ oraz $b=(\sqrt{b})^2$ są wymierne, gdyż obie są kwadratami liczb wymiernych. Wobec tego liczba $a+b$ jest także wymierna.

15. Dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B nie leżące na tej płaszczyźnie. Niech C i D będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na płaszczyznę π. Wynika z tego, że

T a) punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie;

T b) płaszczyzna π jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej punkty A, C i D.

T c) $AB \geqslant CD$.

Komentarz

a) Jeśli proste k i l są prostopadłe do płaszczyzny π, to proste te są równoległe. Wynika stąd, że proste AC i BD są równoległe. Każde dwie proste równoległe leżą w jednej płaszczyźnie, więc w szczególności punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie.

b) Jeśli prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π, to każda płaszczyzna zawierająca prostą k jest prostopadła do płaszczyzny π. Prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny π, a zatem płaszczyzna zawierająca punkty A, C i D jest prostopadła do płaszczyzny π.

c) Prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny π, a zatem prosta ta jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności także do prostej CD. Zatem $\sphericalangle ACD=90^\circ$. Niech P będzie takim punktem, że czworokąt $ACDP$ jest prostokątem. Wówczas $CD=AP$ oraz $\sphericalangle APB=90^\circ$. Stąd uzyskujemy $AB \geqslant AP=CD$.