VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(17 marca 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których liczby $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$. Wówczas $x=a-\sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b=(a-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=(1-2a)\sqrt{3}+a^2+3, \quad \text{czyli} \quad (1-2a)\sqrt{3}=b-a^2-3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1-2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3}=\frac{b-a^2-3}{1-2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1-2a=0$. Wobec tego $a=\frac{1}{2}$, czyli $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania, jest to jedyna liczba o żądanej własności.

---

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD. Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że jeżeli $KP=LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Ponieważ punkty L i N są środkami odpowiednio boków AD i CD trójkąta ACD, więc $LN=\frac{1}{2}AC$ oraz prosta LN jest równoległa do prostej AC. Analogicznie wykazujemy, że $MK=\frac{1}{2}AC$ oraz prosta MK jest równoległa do prostej AC.

Wobec tego $LN=MK$, a ponadto proste LN i MK są równoległe. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QLN=\sphericalangle PKM$, jako kąty naprzemianległe. Zatem trójkąty MKP i NLQ są przystające (cecha bok-kąt-bok). Stąd wniosek, że $\sphericalangle KPM=\sphericalangle LQN$, czyli proste MP i NQ są równoległe. Wobec tego proste AB i CD również są równoległe.

---

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Udowodnij, że

$$d \geqslant \sqrt{a+b}.$$

Szkic rozwiązania

Niech x, y będą dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których $a=dx$, $b=dy$. Ponieważ d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b, więc liczby x i y są względnie pierwsze.

Skoro iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$, to istnieje dodatnia liczba całkowita z taka, że $(a+b)\cdot z=ab$. Stąd otrzymujemy

$$d(x+y)\cdot z=d^2xy, \quad \text{czyli} \quad (x+y)\cdot z=dxy.$$

To oznacza, że liczba dxy jest podzielna przez $x+y$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczby $x+y$ i x są względnie pierwsze. Podobnie liczby $x+y$ i y. Wobec tego z podzielności $x+y \mid dxy$ wynika, że $x+y \mid d$. Stąd wniosek, że $d \geqslant x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2 \geqslant a+b$, czyli $d \geqslant \sqrt{a+b}$.

---

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n+2}$$

na n-tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy liczbę $\sqrt{100^n+2}$ przez a. Udowodnimy, że w zapisie dziesiętnym liczby a, na *każdym* miejscu od pierwszego do n-tego po przecinku, jest cyfra 0. W tym celu wskażemy taką dodatnią liczbę całkowitą k, że $k < a < k+\frac{1}{10^n}$.

Zauważmy, że $a = \sqrt{100^n+2} > \sqrt{100^n}$, czyli $a > 10^n$. Z drugiej strony

$$a^2 = 100^n+2 < 100^n+2+\frac{1}{100^n} = \left(10^n+\frac{1}{10^n}\right)^2, \quad \text{a zatem} \quad a < 10^n+\frac{1}{10^n}.$$

Podsumowując, $10^n < a < 10^n+\dfrac{1}{10^n}$, co kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC=a$, $AD=b$. Na krawędziach AB, AC, DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K, L, M, N, że

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC} = \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{skąd} \quad KL = BC\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN, NM, MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego