

# Symetria środkowa

## 1. Cele lekcji

### a) Wiadomości

1. Przypomnienie, poszerzenie i utrwalenie wiadomości o symetrii środkowej w ujęciu klasycznym i analitycznym.
2. Przypomnienie i utrwalenie wiadomości o figurach środkowosymetrycznych.

### b) Umiejętności

1. Uczeń potrafi konstruować obrazy punktów, niektórych figur w symetrii środkowej.
2. Uczeń potrafi rozpoznawać figury środkowosymetryczne, potrafi je konstruować.
3. Uczeń potrafi rozwiązywać zadania dotyczące symetrii środkowej.
4. Ćwiczenie umiejętności pracy z tekstem matematycznym.
5. Ćwiczenie umiejętności pracy w grupie.

## 2. Metoda i forma pracy

Praca indywidualna, praca w grupach.

## 3. Środki dydaktyczne

1. Komputer z rzutnikiem multimedialnym.
2. Podręcznik i zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego.

## 4. Przebieg lekcji

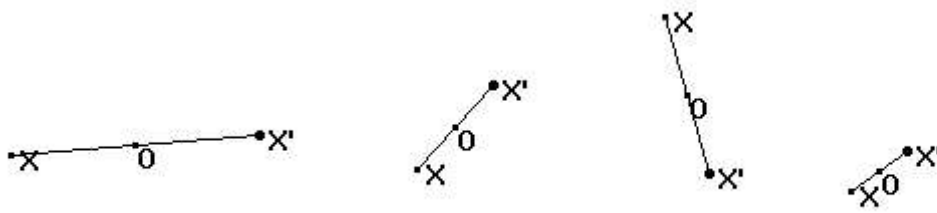
Uczniowie podają określenia symetrii środkowej (znane z nauki wcześniejszej lub ze źródeł książkowych). Mogą padać różne odpowiedzi, np.:

1. *Obrazem punktu  $X$  w symetrii środkowej względem punktu  $O$  jest taki punkt  $X'$ , że punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $XX'$ .*
2. *Obrazem punktu  $X$  w symetrii środkowej względem punktu  $O$  jest taki punkt  $X'$ , że punkty  $O$ ,  $X$ ,  $X'$  są współliniowe oraz  $XO = OX'$  i punkty  $X$ ,  $X'$  leżą po przeciwnych stronach punktu  $O$ .*

Zastanawiamy się, czy podane określenia są prawidłowe oraz równoważne, czy mówią „o tym samym” obiekcie matematycznym (weryfikacja na podstawie konstrukcji). Po tej części wstępnej przyjmujemy następującą definicję symetrii środkowej zapisaną symbolicznie:

$$S_o(X) = X' \Leftrightarrow \vec{XO} = \vec{OX'}$$

Po podaniu definicji uczniowie poszukują konstrukcyjnie obrazy kilku punktów (jeden w środku symetrii  $O$ ). Następnie uczący „na oczach” uczniów konstruuje na komputerze obraz  $X'$  punktu  $X$  w symetrii środkowej (wykorzystuje w tym celu program CABRI 1), dodatkowo tworzy odcinek  $XX'$ , porusza punktem  $X$ .

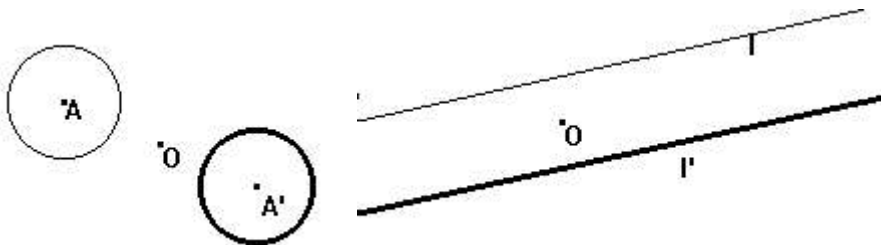


Po takiej krótkiej obserwacji uczniowie otrzymują następujące polecenia do samodzielnej, a później zespołowej pracy (4 osoby z dwóch sąsiednich ławek):

- Czy symetria środkowa jest przekształceniem geometrycznym?
- Znajdź punkty stałe symetrii środkowej.
- Wyznacz zbiór wartości symetrii środkowej.
- Scharakteryzuj odcinki  $XX'$ , przy wszelkich położeniach punktu  $X$ .
- Co może być obrazem prostej, okręgu, trójkąta?
- Czy można wskazać takie dwa punkty  $X$  i  $Y$ , aby  $XY \neq X'Y'$ ?
- Jakie jest przekształcenie odwrotne do symetrii środkowej?

Odpowiedzi na powyższe pytania muszą być poparte jakąś argumentacją.

Po kilku minutach następuje zebranie wiadomości – uczniowie relacjonują wyniki swojej pracy w zespole. Niektóre rezultaty są popierane rozumowaniem matematycznym, inne mają charakter intuicyjny. Uczący wspiera uczniów odpowiednimi pokazami w CABRI 1, np.: obraz prostej, okręgu.



W wyniku wymiany poglądów zostają sformułowane następujące odpowiedzi na postawione pytania:

- ✓ Symetria środkowa jest przekształceniem geometrycznym, tzn. każdemu punktowi na płaszczyźnie jest przyporządkowany w sposób jednoznaczny jeden i tylko jeden obraz.
- ✓ Symetria środkowa posiada dokładnie jeden punkt stały, jest to środek symetrii:  $S_o(X) = X$ , czyli  $\vec{XO} = \vec{OX}$ , a więc  $2\vec{XO} = \vec{0}$ , czyli  $X = O$ .
- ✓ Zbiorem wartości symetrii środkowej jest cała płaszczyzna.
- ✓ Odcinki  $XX'$  nie są do siebie równoległe, środek symetrii jest środkiem każdego odcinków, różnej długości: od 0 do dowolnie dużej. Odcinki te tworzą zbiór odcinków z stałym, nieruchomym środkiem.
- ✓ Obrazem prostej jest prosta równoległa, obrazem okręgu okrąg o tym samym promieniu: niech punkty  $X$  i  $Y$  należą do prostej  $l$  oraz  $S_o(X) = X' \Leftrightarrow \vec{XO} = \vec{OX'}$  i  $S_o(Y) = Y' \Leftrightarrow \vec{YO} = \vec{OY'}$ ;  $\vec{XY} = \vec{XO} + \vec{OY} = \vec{OX'} + (-\vec{OY'}) = \vec{Y'O} + \vec{OX'} = \vec{Y'X'}$ , zatem

wektory  $\vec{XY}$  i  $\vec{Y'X'}$  są równe, a to oznacza, że mają te same długości oraz odcinki  $XY$  i  $X'Y'$  są równoległe.

- ✓ Symetria środkowa jest przekształceniem izometrycznym (patrz rozumowanie wyżej).
- ✓ Przekształceniem odwrotnym do symetrii środkowej jest ta sama symetria środkowa. Symetria środkowa jest więc przekształceniem inwolucyjnym.

Kolejny etap lekcji dotyczy symetrii środkowej w układzie współrzędnych. Zadanie uczniów polega na znalezieniu związku pomiędzy współrzędnymi punktu  $A(x, y)$ , a współrzędnymi jego obrazu  $A'(x', y')$  w symetrii środkowej względem:

- początku układu współrzędnych,
- dowolnego punktu  $O(a, b)$ .

Uczniowie najpierw pracują samodzielnie, potem znów czwórkami. Na koniec jedna z grup relacjonuje swoje wyniki (podając odpowiednią argumentację): dla dowolnego punktu  $X(x, y)$  i  $O(a, b)$ : zgodnie z definicją symetrii środkowej otrzymujemy, że  $\vec{XO} = \vec{OX'}$ , czyli:

$$[a-x, b-y] = [x'-a, y'-b], \text{ a z tego: } \begin{cases} a-x = x'-a \\ b-y = y'-b \end{cases}, \text{ zatem: } \begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = 2b-y \end{cases}. \text{ Jeśli } O(0,0), \text{ to } X'(-x, -y).$$

Ostatnim etapem lekcji są rozważania dotyczące figur środkowosymetrycznych. Uczniowie początkowo prezentują swoje wyobrażenie figur środkowosymetrycznych. W wyniku zebranych informacji i przykładów oraz dyskusji popartej odwołaniami do figur osiowosymetrycznych zostaje sformułowana definicja figur środkowosymetrycznych oraz środka symetrii figury:

*Figura  $F$  jest środkowosymetryczna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki punkt  $O$ , że  $S_O(F) = F$ . Punkt  $O$  jest środkiem symetrii figury  $F$ , jeśli  $S_O(F) = F$ .*

Uczniowie rysują w zeszytach własne przykłady figur środkowosymetrycznych, charakteryzując czworokąty ze względu na ich środkowosymetryczność.

Na zakończenie uczniowie wykonują ćwiczenia ze zbioru zadań: strony: 179 – 181.

## 5. Bibliografia

1. Konior J., *Repetitorium z CABRI, część II*, [w:] „Matematyka i Komputery” nr 11, 2002, s. 5-8.
2. Pająk W., *Badanie przekształceń geometrycznych*, [w:] „Nauczyciele i Matematyka” nr 8, 1993, s. 22-23.
3. Pająk W., *CABRI i przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie*, VULCAN, Wrocław 1994.
4. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.
5. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.

## **6. Załączniki**

### **a) Zadanie domowe**

1. Kilka ćwiczeń ze zbioru zadań: strony: 179-181.
2. Problemy:
  - a. Wskaż figury, które nie mają środka symetrii, mają ich: 1, 2, 3, 4, ..., n, nieskończenie wiele.
  - b. Czy są zależności pomiędzy liczbą osi symetrii i środków symetrii figury?
  - c. Scharakteryzuj duże drukowane litery alfabetu pod względem istnienia ich środka symetrii.
  - d. Które z czworokątów są figurami: osiowosymetrycznymi, środkowosymetrycznymi oraz jednocześnie osiowo i środkowosymetrycznymi.

## **7. Czas trwania lekcji**

2 godziny lekcyjne

## **8. Uwagi do scenariusza**

brak